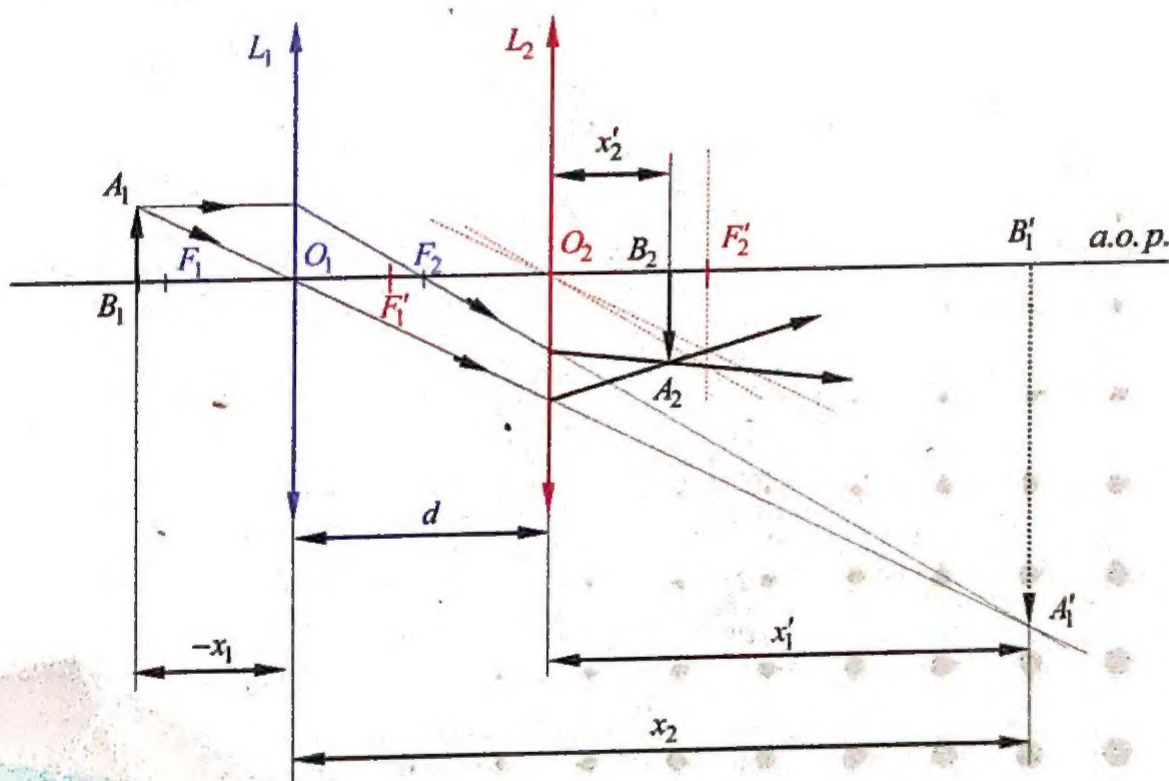


CARMEN DANIELA CĂPITANU

# Bazele opticii geometrice



11-20.231

Carmen-Daniela CĂPITANU

847481

# BAZELE OPTICII GEOMETRICE



0 000008 70642

BCU IASI





## CUPRINS

<b>Introducere .....</b>	<b>9</b>
<b>Capitolul 1. Principiile generale ale opticii geometrice .....</b>	<b>11</b>
1.1. Principii și legi fundamentale în optica geometrică .....	11
1.2. Principiul lui Fermat. Reflexia și refracția luminii .....	13
1.2.1. Reflexia luminii .....	14
1.2.2. Refracția luminii .....	16
1.3. Teorema lui Malus .....	19
1.4. Fascicule homocentrice .....	21
1.5. Stigmatism și astigmatism .....	21
1.6. Aplicații .....	22
<b>Capitolul 2. Oglinzi .....</b>	<b>31</b>
2.1. Oglinzi sferice .....	31
2.2. Formarea imaginilor în oglinzi sferice .....	32
2.2.1. Imaginea sagitală .....	32
2.2.2. Imaginea tangențială .....	34
2.3. Oglinzi sferice în aproximația lui Gauss .....	39
2.3.1. Caracterizarea oglinzilor .....	39
2.3.2. Formarea imaginilor .....	41
2.4. Oglinzi plane .....	49
2.5. Aplicații .....	50
<b>Capitolul 3. Dioptrul plan .....</b>	<b>59</b>
3.1. Noțiunea de dioptru plan .....	59
3.2. Formarea imaginilor în dioptrul plan .....	61
3.2.1. Imaginea sagitală .....	62
3.2.2. Imaginea tangențială .....	64
3.2.3. Construcția grafică a razei refractate .....	67
3.3. Asociații de dioptri plani .....	68
3.3.1. Lama cu fețe plan-paralele .....	69
3.3.2. Prisma optică .....	72
3.4. Aplicații .....	76



<b>Capitolul 4. Dioptrul sferic</b> .....	85
4.1. Caracterizarea dioptrului sferic .....	85
4.2. Formarea imaginilor în dioptrul sferic .....	86
4.2.1. Imaginea sagitală .....	86
4.2.2. Imaginea tangențială .....	89
4.3. Dioptrul sferic în aproximația lui Gauss .....	93
4.3.1. Relațiile fundamentale ale dioptrului sferic .....	93
4.3.2. Focarele dioptrului sferic .....	96
4.4. Asociații de dioptri sferici. Lentile subțiri .....	100
4.4.1. Formarea imaginilor în lentila subțire .....	102
4.4.2. Asociații de lentile subțiri .....	110
4.5. Aplicații .....	116
 <b>Capitolul 5. Instrumente optice</b> .....	125
5.1. Mărire liniară, grosiment, putere .....	125
5.2. Instrumente optice cu imagine reală .....	126
5.2.1. Ochiul .....	126
5.2.1.1. Aspecte generale .....	129
5.2.1.2. Deficiențe de convergență a ochiului .....	134
5.2.2. Aparatul fotografic .....	135
5.2.2.1. Mărimi caracteristice. Profunzimea de câmp în spațiul obiect .....	136
5.2.2.2. Formarea imaginii fotografice. Profunzimea câmpului imaginii .....	139
5.3. Instrumente optice cu imagine virtuală .....	142
5.3.1. Lupa .....	143
5.3.2. Microscopul .....	146
5.3.3. Luneta .....	149
5.4. Aplicații .....	152
 <b>Capitolul 6. Sisteme centrate</b> .....	159
6.1. Punctele cardinale ale unui sistem centrat .....	159
6.2. Formarea imaginilor prin sisteme centrate .....	162
6.2.1. Reguli de construire a imaginii .....	163
6.2.2. Construirea imaginilor cu ajutorul focarelor .....	166
6.2.3. Relații de conjugare .....	167
6.3. Asocierea sistemelor centrate .....	168
6.4. Mărirea liniară a sistemului afocal .....	170



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

6.5. Lentila groasă .....	171
6.6. Formule generale pentru determinarea poziției punctelor cardinale ale unei lentile groase .....	174
6.7. Aplicații .....	176
<b>Bibliografie .....</b>	<b>191</b>



## INTRODUCERE

Încă din antichitate, lumina a fascinat și a provocat imaginația oamenilor.

Știința a luminii, optica se ocupă cu studiul fenomenelor luminoase și prezintă astăzi două ramuri majore: optica fizică și optica geometrică. Dacă punctul de plecare al opticii fizice îl constituie natura luminii, în optica geometrică aceasta nu are importanță. Oricare ar fi ea, fenomenele de bază la care participă sunt aceleași și se supun aceluiași legi și principii – vorbim aici despre parcurgerea diferitelor medii optice transparente, despre reflexie și refracție.

Fiecare mediu pe care îl traversează lumina îi influențează comportamentul într-un mod specific. În esență, spunea fizicianul Hideki Yukawa, natura este simplă. Selectând combinații de medii transparente, se pot construi sisteme optice al căror studiu scoate în evidență simplitatea legilor și principiilor opticii geometrice, precum și ușurința cu care ele pot fi folosite.

Lucrarea de față se adresează studenților și profesorilor de fizică deopotrivă, dar este accesibilă și celor care doresc să își formeze o bază în studiul opticii sau să o consolideze pe cea existentă. Fără a avea pretenția de a trata toate temele care pot fi asociate cu optica geometrică, ea pornește de la noțiuni simple pe care le dezvoltă până la concepte mai complexe, urmărindu-se o mai bună înțelegere și aprofundare a acestora și subliniind de fiecare dată modul în care au fost folosite legile și principiile specifice, transformate aici în instrumente de lucru ușor de mânuit.

Înțelegerea și aprofundarea conținuturilor sunt facilitate și de o serie de aplicații, prezente la finalul fiecărui capitol. În concordanță fiind cu temele abordate, problemele propuse au rol nu doar de exersare a celor învățate, ci și de ghidare a gândirii și, uneori, chiar a imaginației, provocând cititorul să privească lucrurile într-o nouă perspectivă.

Considerăm astfel că sunt îndeplinite toate condițiile pentru ca parcurgerea acestor pagini să se transforme într-o lectură interesantă, plăcută și utilă.

B.C.U. "M. EMINESCU" IASI  
F. I. 7. 1. C.



# CAPITOLUL 1. PRINCIPIILE GENERALE ALE OPTICII GEOMETRICE

## 1.1. Principii și legi fundamentale în optica geometrică

Numeroase fenomene optice se explică cu ajutorul a trei legi simple: legea propagării rectilinii a luminii, legea reflexiei regulate a luminii și legea refracției regulate a luminii. La aceste trei legi fundamentale se adaugă și două principii ajutătoare: principiul independenței propagării razelor de lumină și principiul reversibilității drumului optic. Acestea se enunță astfel:

1. *Legea propagării rectilinii a razelor de lumină:* într-un mediu omogen, lumina se propagă în linie dreaptă până la întâlnirea unui obstacol sau a unui alt mediu, cu alte caracteristici optice<sup>1</sup>.

2. *Principiul independenței propagării razelor de lumină:* razele de lumină incoerente care trec printr-un punct, întretându-se, nu se influențează reciproc<sup>2</sup>.

3. *Principiul reversibilității drumului razelor:* o rază care parcurge un sistem optic într-un sens urmează același drum și când este dirijată prin sistemul optic în sens invers, dacă celelalte condiții rămân neschimbate.

Aceste principii sunt susceptibile unor observații.

Primul principiu enunțat nu poate fi verificat direct, neputând fi imaginate experiențe care să dovedească acest enunț, dar pot fi observate și verificate consecințele sale: fenomenul de umbră și penumbră (figurile 1.1, 1.2 și 1.3), formarea imaginilor în camera obscură, eclipsele de Soare și de Lună, etc.

<sup>1</sup> cu un alt indice de refracție

<sup>2</sup> nu interferează



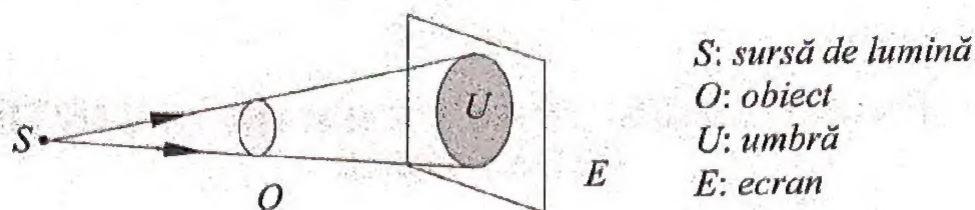


Figura 1.1. Producerea umbrei și a penumbrei în cazul unei surse luminoase punctiforme

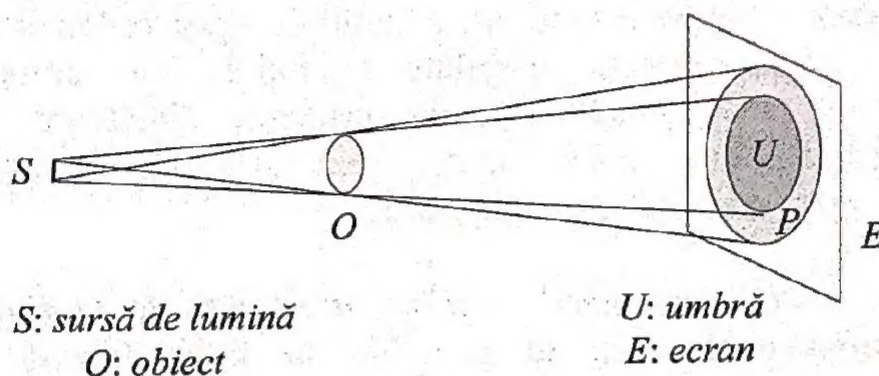


Figura 1.2. Producerea umbrei și a penumbrei în cazul unei surse luminoase extinse

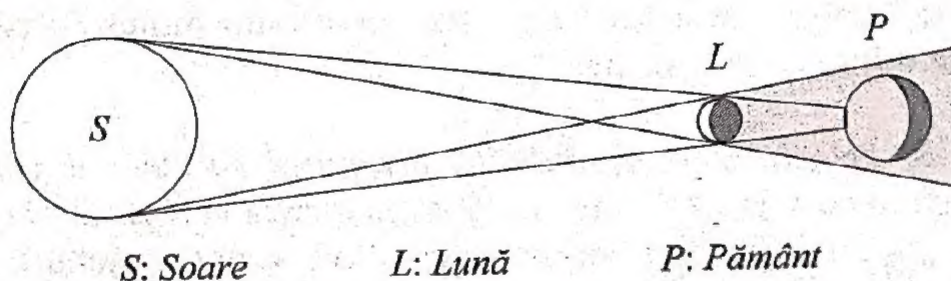


Figura 1.3. Producerea umbrei și a penumbrei în cazul unei surse luminoase de dimensiuni foarte mari

În plus, în anumite condiții, principiul propagării rectilinii a razelor de lumină nu mai este respectat. Dacă se îngustează diametrul unui fascicul prin diafragmare până la dimensiuni de ordinul zecimii de milimetru, se va constata că direcția de propagare, după diafragmă, nu mai poate fi precizată: în locul unui fascicul paralel apare un fascicul divergent, cu intensitatea variind după direcție<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> fenomenul de difracție



**1.2. Principiul lui Fermat. Reflexia și refracția luminii**

Locul celor trei principii poate fi luat de *principiul lui Fermat*, din care rezultă și legile reflexiei și refracției. Acest principiu se enunță astfel: **drumul optic parcurs de o rază de lumină între două puncte este un extrem în raport cu oricare drum geometric posibil.**

Pentru a înțelege semnificația fizică a acestui enunț, trebuie definit drumul optic parcurs de o rază de lumină, care este strâns legat de indicele de refracție  $n$  al mediului traversat de acea rază de lumină.

Orice mediu optic transparent este caracterizat printr-un indice de refracție, dat de raportul dintre viteza luminii în vid ( $c$ ) și viteza luminii în mediul respectiv ( $v$ ):

$$n = \frac{c}{v}$$

În tabelul 1.1 se regăsesc valorile indicelui de refracție pentru câteva materiale optic transparente.

Tabelul 1.1. Indicii de refracție ai unor materiale uzuale

Nr. crt.	Material	$n$	Nr. crt.	Material	$n$
1	Acrilonitril stiren copolimer	1,56735	9	Fluorină	1,43
2	Aer	1,0003	10	Glicerină	1,473
3	Alcool etilic	1,361	11	Polimetilmetacrilat (PMMA)	1,49166
4	Apă la 37°C	1,33093	12	Polistiren	1,59027
5	Apă la 20°C	1,33299	13	Silicon	1,438
6	Benzen	1,501	14	Sticlă	1,5-1,8
7	Cornee	1,376	15	Umoare apoasă	1,336
8	Diamant	2,42	16	Umoare vitroasă	1,336

Dacă o rază parcurge într-un mediu de indice de refracție  $n$  o distanță  $l$ , se spune că a parcurs drumul optic:

$$[AB] = nl$$



care se va defini ca fiind distanța pe care o parcurge în vid o altă rază de lumină, în timpul în care prima rază parcurge distanța  $l$  în mediul de indice de refracție  $n$ .

Fermat pornește de la ideea că lumina întrebuițează întotdeauna timpul minim pentru ca să ajungă de la un punct la altul, dar există cazuri (când este vorba despre reflexie) în care drumul este maxim sau staționar.

### 1.2.1. Reflexia luminii

Se numește *reflexie* a luminii fenomenul de schimbare a direcției de propagare a acesteia, atunci când întâlnește o suprafață de separare între două medii, ea întorcându-se în mediul din care a venit.

Se consideră o suprafață de separare (reflectătoare), cum este cea din figura 1.4, notată cu  $\pi$ .

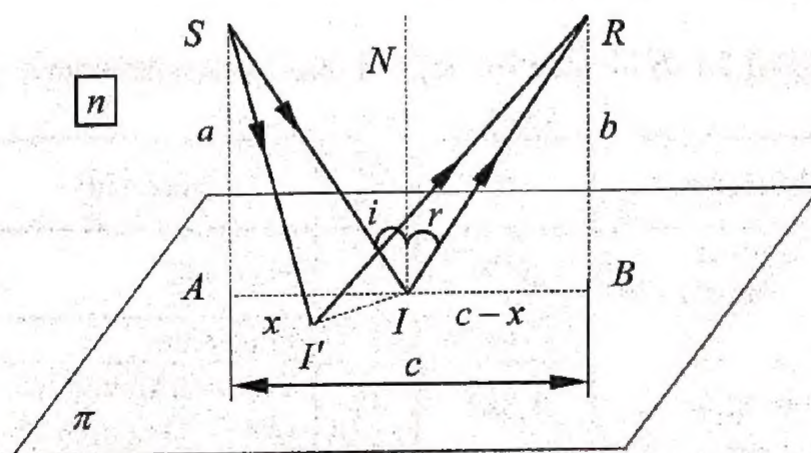


Figura 1.4. Stabilirea legilor reflexiei luminii cu ajutorul principiului lui Fermat

Prezintă importanță următoarele:

**a) determinarea planului care conține razele incidentă și reflectată**

Fie  $S$  o sursă punctiformă de lumină de la care pornește raza incidentă ( $SI$ ). Construind raza reflectată ( $IR$ ) și normala la suprafața reflectătoare în punctul de incidență  $I$  (linia întreruptă  $IN$ ), se obține



planul ( $SAIBR$ ), perpendicular pe planul  $\pi$ , unde punctele  $A$  și  $B$  reprezintă proiecțiile punctelor  $S$  și  $P$  pe planul de separare  $\pi$ .

Se presupune că se poate găsi o altă traiectorie minimă, situată în alt plan, ( $SI'R$ ). Se proiectează această traiectorie pe planul care trece prin  $SR$  și este perpendicular pe  $\pi$  (adică planul ( $SAIBR$ )) și se obține „drumul”  $SIR$ , care este mai mic decât  $SI'R$ :

$$\left. \begin{array}{l} SI' > SI \\ I'R > IR \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{SI' + I'R}_{\text{drumul } SI'R} > \underbrace{SI + IR}_{\text{drumul } SIR}$$

Se observă că, din punct de vedere geometric, s-au obținut triunghiurile dreptunghice  $\triangle SII'$  ( $m(\widehat{SII'}) = 90^\circ$ ), respectiv  $\triangle RII'$  ( $m(\widehat{RII'}) = 90^\circ$ ), în care  $SI'$  și  $RI'$  reprezintă ipotenuze, cu lungimea mai mare decât cea a catetelor  $SI$ , respectiv  $RI$ .

Rezultă astfel că **normala la suprafața de separație în punctul de incidență, raza incidentă și cea reflectată se găsesc în același plan (legea I a reflexiei).**

#### **b) determinarea direcției de propagare a razei reflectate**

Prima lege a reflexiei stabilește faptul că razele incidentă și reflectată sunt coplanare. Planul comun conține și normala la suprafața de separație în punctul de incidență, care este responsabilă cu stabilirea orientării în spațiu a planului pe care se produce reflexia. Cu toate acestea, cunoscând două puncte fixe prin care trece raza de lumină înainte și după reflexie ( $S$  și  $R$ ), este necesar să cunoaștem relația dintre unghiurile de incidență și cel de reflexie, pentru a putea caracteriza fenomenul pe deplin.

Deoarece, așa cum s-a precizat, direcția de propagare a razei incidente, respectiv a razei reflectate se stabilesc în raport cu normala  $IN$ , pornind de la ipoteza că  $S$  este o sursă punctiformă de lumină, fixă, de la care pornește raza incidentă ( $SI$ ), iar  $R$  este un punct fix al razei reflectate, prezintă interes poziția exactă a punctului de incidență,  $I$ , în planul ( $SAIBR$ ), mai precis, pe segmentul  $AB$ .



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

Se notează distanța  $\|AB\| = c$ , care este o constantă, în condițiile în care punctele  $S$  și  $R$  sunt fixate. Se obține astfel drumul optic al luminii prin mediul  $n$ , între  $S$  și  $R$ :

$$[SI] + [IR] = n \left( \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \right)$$

unde  $a = SA$  și  $b = RB$  sunt, la rândul lor, două constante, datorită naturii punctelor  $S$  și  $R$  (fixate). Deoarece drumul optic este extrem, se pune condiția:

$$\frac{d}{dx}([SI] + [IR]) = 0$$

de unde rezultă:

$$n \left( \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-(c-x)}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Dar, conform figurii 1.4:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin i; \quad \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \sin r$$

și astfel se obține:

$$\sin i = \sin r \Rightarrow i = r$$

relație care reprezintă a doua lege a reflexiei.

Prin urmare, punctul de incidență este astfel situat, încât unghiurile de incidență și de reflexie, măsurate față de normala pe suprafața de separare în punctul de incidență, să fie congruente.

### 1.2.2. Refracția luminii

Se numește *refracție* a luminii fenomenul prin care lumina își schimbă direcția de propagare atunci când trece dintr-un mediu optic transparent în altul.

**a) determinarea planului care conține razele incidentă și refractată**

Se consideră două medii optic transparente, având indicele de refracție  $n_1$ , respectiv  $n_2$ , separate printr-o suprafață plană  $\pi$ . Fie un



punct  $I$ ; situat la intersecția dintre planul  $\pi$  și planul normal la acesta, care conține atât normala la suprafața de separație în punctul  $I$ , notată cu  $NI$ , cât și două puncte considerate fixe între care se propagă lumina, aparținând razelor incidentă, respectiv refractată; acestea se vor numi  $S$  și  $R$  (figura 1.5).

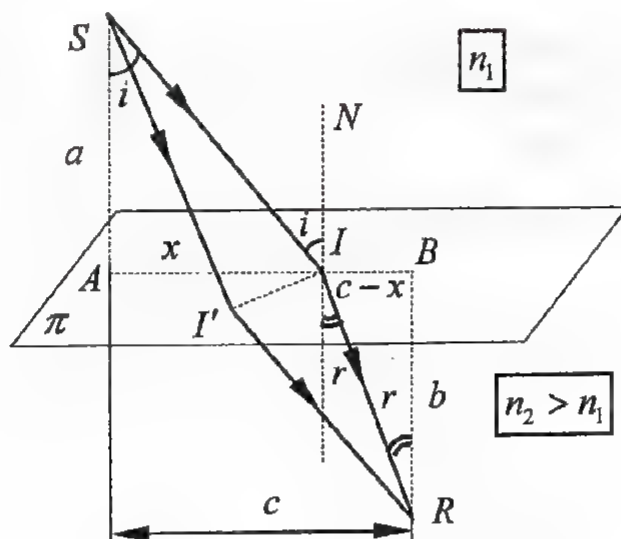


Figura 1.5. Stabilirea legilor refracției luminii cu ajutorul principiului lui Fermat

Se consideră pentru început că nu  $I$  este cel care ar aparține traiectoriei minime, ci un alt punct,  $I'$ , situat în alt plan. Se obțin astfel drumurile  $(SI')$  și  $(I'R)$ , care sunt mai mari decât  $(SI)$  și  $(IR)$ :

$$\left. \begin{array}{l} SI' > SI \\ I'R > IR \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{SI' + I'R}_{\text{drumul } SI'R} > \underbrace{SI + IR}_{\text{drumul } SIR}$$

deci traiectoriei minime îi corespunde cazul în care  $I$  se află în planul ce conține raza incidentă, normala și raza refractată. Acest rezultat reprezintă de fapt **prima lege a refracției**: raza incidentă, raza refractată și normala se află în același plan.

#### b) determinarea direcției de propagare a razei refractate

Ca și în cazul reflexiei, prima lege a refracției stabilește care este planul în care are loc refracția. Planul comun conține, și în acest caz, normala la suprafața de separație în punctul de incidență,



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

responsabilă cu stabilirea orientării în spațiu a planului pe care are loc refracția.

La fel ca și în cazul reflexiei, se urmărește ca pornind de la două puncte fixe, considerate cunoscute, prin care trece raza de lumină înainte și după refracție, să se stabilească relația dintre unghiul de incidență și cel de refracție.

Fie  $S$  și  $R$  cele două puncte fixate. Fie  $A$  proiecția punctului  $S$  pe planul de incidență  $\pi$  și  $B$  proiecția lui  $R$  pe același plan. Folosind notațiile  $\|AB\| = c$ ,  $\|SA\| = a$ ,  $\|RB\| = b$ , unde  $a, b$  și  $c$  sunt constante, se aplică principiul drumului optic extrem al lui Fermat:

$$[SI] + [IR] = \text{minim}$$

$$[SI] = n_1 \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$[IR] = n_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

deci:

$$n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2} = \text{minim}$$

condiție care se scrie astfel:

$$\frac{d}{dx}([SI] + [IR]) = 0$$

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-n_2 (c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{n_2 (c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Dar, conform figurii 1.5:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin i; \quad \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin r$$

și astfel rezultă:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

Această relație se mai cunoaște și sub numele de **legea Snell-Descartes** și reprezintă **a doua lege a refracției**. Ea stabilește faptul că direcția de propagare a luminii în cel de-al doilea mediu este condiționată atât de caracteristicile optice ale acestuia, cât și de condițiile de propagare a luminii în primul mediu, determinate de proprietățile sale optice și de unghiul de incidență.



În plus, această relație are o formă simetrică, ceea ce este în concordanță cu faptul că fenomenul de refracție nu depinde de sensul în care lumina traversează suprafața de separare dintre cele două medii (se regăsește astfel principiul reversibilității).

### Observație

Planul care conține normala la suprafața de separație în punctul de incidență, raza incidentă și raza reflectată/refractată poartă numele de *plan de incidență*.

## 1.3. Teorema lui Malus

Fie o sursă punctiformă de lumină,  $S$ .

Se numește *suprafață de undă*  $(\Sigma)$  locul geometric al punctelor  $M$  pentru care drumul optic  $[SM]$  este constant, drumul fiind considerat de-a lungul razelor de lumină.

Se observă că dacă sursa punctiformă se află într-un mediu omogen, suprafețele de undă sunt suprafețe concentrice (figura 1.6), având centrul în  $S$ ; se spune în acest caz că  $S$  este o sursă de unde sferice.

În cazul în care sursa se află la infinit, se spune că suprafețele de undă sunt plane.

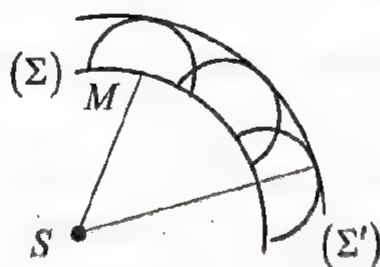


Figura 1.6. Formarea suprafețelor de undă sferice  
(conform principiului lui Huygens)

Fie un sistem de raze de lumină  $SA$ ,  $SB$ , ...,  $SM$ , astfel încât punctele  $A$ ,  $B$ , ...,  $M$  se află pe aceeași suprafață de undă,  $(\Sigma_1)$  (figura 1.7), într-un mediu având indicele de refracție  $n_1$ .



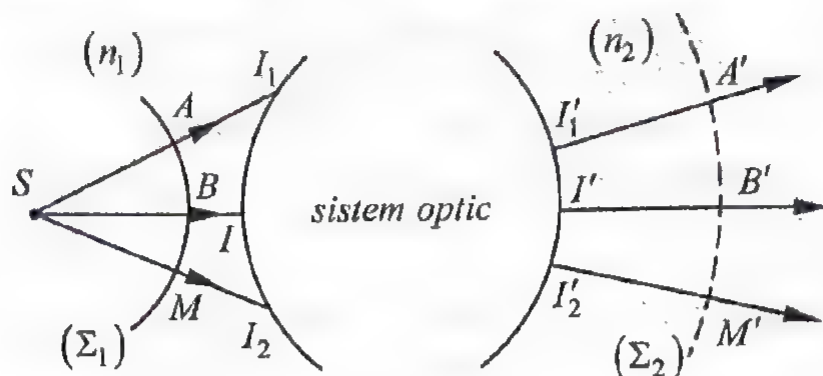


Figura 1.7. Ilustrarea teoremei lui Malus

După reflexii și refracții succesive pe suprafețele unui sistem optic, aceste raze emerg într-un mediu cu indicele de refracție  $n_2$ , pe direcțiile  $I_1'A'$ ,  $I'B'$ , ...,  $I_2'M'$ .

Teorema lui Malus spune că dacă razele  $SA$ ,  $SB$ , ...,  $SM$  sunt normale la suprafața de undă  $(\Sigma_1)$ , atunci și razele  $I_1'A'$ ,  $I'B'$ ,  $I_2'M'$ , care constituie fascicolul de lumină în al doilea mediu sunt normale la o aceeași suprafață de undă,  $(\Sigma_2)$ , care se determină luând pe fiecare din raze drumuri optice egale:

$$[AI_1...I_1'A'] = [BI...I'B'] = [MI_2...I_2'M']$$

Cu alte cuvinte, razele unui fascicul homocentric divergent, care sunt normale la o suprafață  $(\Sigma_1)$  păstrează această proprietate după un număr oarecare de reflexii sau refracții, rămânând normale la o suprafață  $(\Sigma_2)$ .

Teorema lui Malus este o consecință a principiului lui Fermat și permite definirea precisă a razelor de lumină ca normale la o infinitate de suprafețe, introducând astfel noțiunea de suprafață de undă geometrică.

Fiecărui drum optic îi corespunde o suprafață de undă și astfel se poate face trecerea la optica ondulatorie, unde suprafața de undă reprezintă locul geometric al punctelor aflate în aceeași stare de vibrație<sup>4</sup>. Între două suprafețe de undă razele de lumină străbat drumuri optice egale.

<sup>4</sup> Suprafața respectivă se numește suprafață echifază



### 1.4. Fascicule homocentrice

Fie o sursă punctiformă,  $S$ . Razele de lumină care provin de la aceasta se propagă în spațiu formând suprafețe de undă sferice și pot ocupa întregul spațiu din jurul punctului; ele formează în acest caz un fascicul de raze nedelimitat.

Dacă razele unui fascicul se intersectează în același punct, el se numește *fascicul homocentric* (conic, izogen). Punctul de intersecție poartă numele de *centru al fascicolului*.

Dacă razele fascicolului se îndepărtează de centru, fasciculul este *homocentric divergent* (figura 1.8.a).

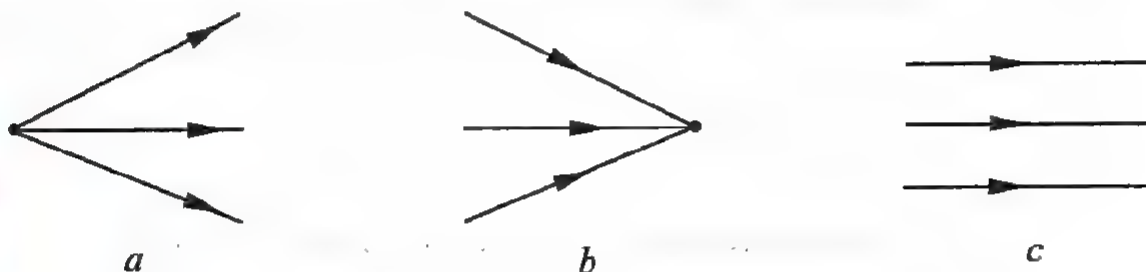


Figura 1.8. Fascicule homeocentrice

Dacă razele fascicolului se apropie de centru, fasciculul este *homocentric convergent* (figura 1.8.b), iar dacă punctul de intersecție al razelor se află la infinit, el se numește *homocentric paralel* (figura 1.8.c).

Fasciculelor homocentrice convergente și divergente le corespund suprafețe de undă sferice, în timp ce fasciculelor paralele le corespund suprafețe de undă plane, razele fascicolului fiind perpendiculare (normale) la aceste suprafețe.

Un fascicul homocentric este caracterizat prin deschiderea sa, care este unghiulară în cazul fascicolului conic (unghi interior al conului geometric) sau liniară, în cazul fascicolului cilindric (diametrul cilindrului geometric).

### 1.5. Stigmatism și astigmatism

Din punctul de vedere al opticii geometrice, orice punct luminos poate fi privit ca vârf al unui fascicul divergent de raze.



Dacă, după ce străbate un sistem optic, un fascicul homocentric divergent cu vârful în punctul  $S$  rămâne tot homocentric, dar convergent, atunci punctul de convergență  $S'$  poartă numele de *image stigmatică reală* a punctului luminos  $S$  (figura 1.9.a).

Dacă după parcurgerea sistemului optic, fasciculul divergent rămâne divergent, atunci punctul de intersecție  $S''$  al prelungirilor razelor emergente poartă numele de *image stigmatică virtuală* a punctului  $S$  (figura 1.9.b).

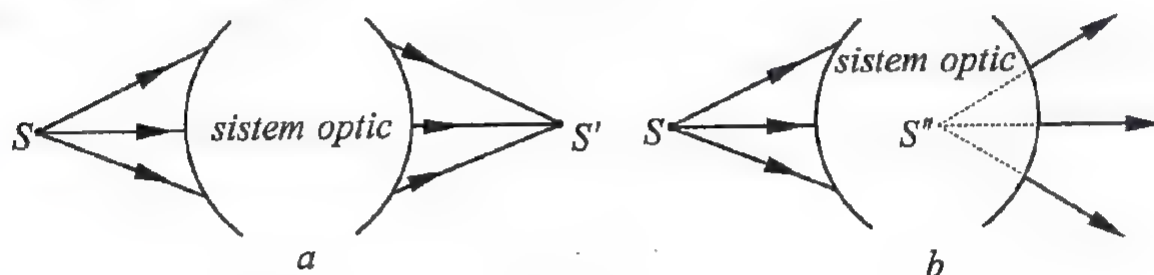


Figura 1.9. Formarea imaginilor stigmatice în sistemele optice

Cele două tipuri de imagini poartă numele de imagini stigmatice, deoarece fiecărui punct obiect îi corespunde un punct imagine. Condiția de stigmatism este îndeplinită dacă unui punct obiect îi corespunde un singur punct imagine.

### Observații

1. În situația descrisă mai sus, dacă sensul de parcurgere a sistemului optic de către lumină este inversat, conform principiului reversibilității drumului razelor de lumină, imaginea poate fi privită ca sursă luminoasă, iar sursa devine imagine (punctiforme).

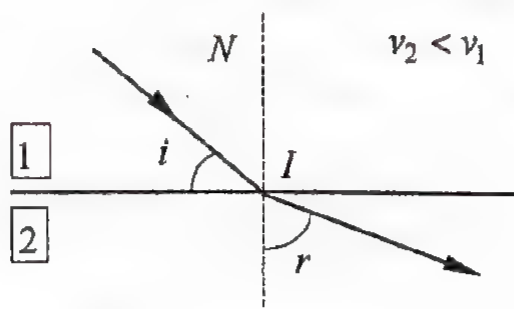
2. Dacă fasciculul își pierde proprietatea de homocentricitate, imaginea nu mai este una stigmatică, deci unei surse punctiforme nu îi mai corespunde o imagine punctiformă. În acest caz, imaginea poartă numele de *image astigmatică*.

## 1.6. Aplicații

### Problema nr. 1.

Găsiți greșelile din figurile de mai jos:

a)

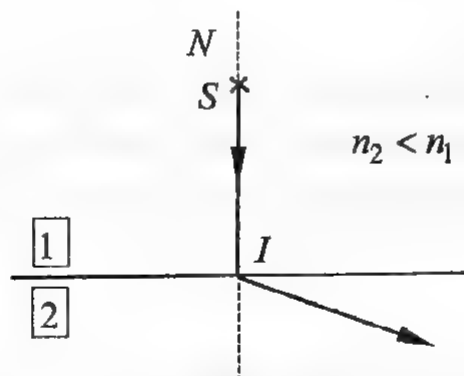


- unghiul de incidență este unghiul făcut de raza incidentă cu normala la suprafața de separare în punctul de incidență
- dacă viteza de propagare a luminii este mai mare în primul mediu decât în al doilea, înseamnă că primul mediu este mai puțin dens decât al doilea, deci:

$$v_1 > v_2 \Rightarrow n_1 < n_2$$

iar raza refractată se apropie de normală

b)



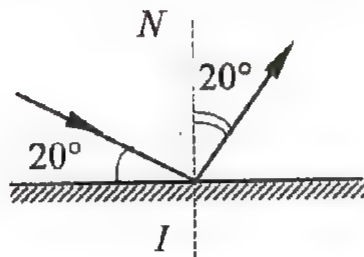
- în situația din figură, unghiul de incidență este  $\angle(SI, NI) = 0$ , caz cunoscut ca *incidență normală*
- unghiul de incidență fiind nul, conform legii a II-a a refracției, rezultă:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_2}{n_1} \sin i = \frac{n_2}{n_1} \sin 0 = 0 \Rightarrow r = 0$$

- prin urmare, indiferent de relația dintre indicii de refracție ai celor două medii, la incidența normală, lumina intră în al doilea mediu nedeviată



c)



- conform legii a doua a reflexiei, unghiul de incidență este egal cu unghiul de refracție
- deoarece unghiul de incidență este făcut de raza incidentă cu normala la suprafața de separație în punctul de incidență, iar unghiul de reflexie este unghiul dintre raza reflectată și aceeași normală, conform figurii, unghiul de incidență este:

$$i = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ (= r)$$

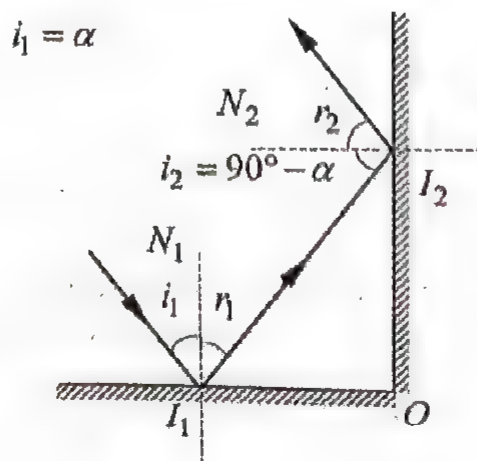
deci și unghiul de reflexie trebuie să aibă valoarea de  $70^\circ$

### Problema nr. 2.

O rază de lumină cade pe un sistem de două oglinzi situate în plane perpendiculare. Presupunând că pe fiecare oglindă are loc câte o reflexie, stabiliți legătura dintre direcția razei incidente și direcția razei emergente.

### Rezolvare

- situația e descrisă în figura de mai jos:



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

- conform legii a doua a reflexiei, lumina părăsește prima oglindă sub un unghi  $r_1 = i_1 = \alpha$  față de normală
- din geometria problemei rezultă că incidența pe a doua oglindă are loc sub un unghi  $i_2 = 90^\circ - \alpha$ :

$$\widehat{N_1 I_1 I_2} \equiv \widehat{O I_2 I_1} = \alpha \text{ (alterne interne)}$$

$$i_2 = 90^\circ - m(\widehat{O I_2 I_1}) = 90^\circ - \alpha$$

- rezultă că unghiul de emergență este:

$$r_2 = i_2 = 90^\circ - \alpha$$

- se observă că unghiul dintre raza incidentă pe sistem și fața primei oglinzi are valoarea  $90^\circ - \alpha$ , ceea ce înseamnă că raza emergentă este paralelă cu cea incidentă

**Problema nr. 3.**

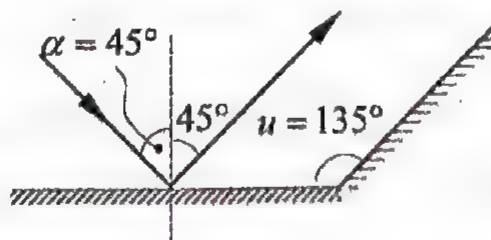
O rază de lumină cade sub un unghi de incidență  $\alpha$  pe o oglindă plană, care este componentă a unui sistem de două oglinzi plane, care fac unghiul diedru  $u > 90^\circ$ .

a) Determinați pentru ce valoare a unghiului  $u$ , raza emergentă, obținută prin reflexia pe ambele oglinzi, este perpendiculară pe cea incidentă

b) Analizați situația în care unghiul de incidență este  $\alpha = 55^\circ$ .

**Rezolvare**

- dacă unghiul de incidență  $\alpha$  este egal cu  $u - 90^\circ$ , raza de lumină reflectată de prima oglindă va fi paralelă cu cea de a doua oglindă



- dacă se consideră că raza de lumină reflectată de prima oglindă este raza emergentă (deși ea nu îndeplinește toate cerințele problemei!), pentru ca să fie perpendiculară pe raza incidentă, trebuie ca  $\alpha = 45^\circ$ , deci  $u = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

$$m(\widehat{I_2 I_1 M}) + m(\widehat{I_1 I_2 M}) + m(\widehat{I_1 M I_2}) = 180^\circ$$

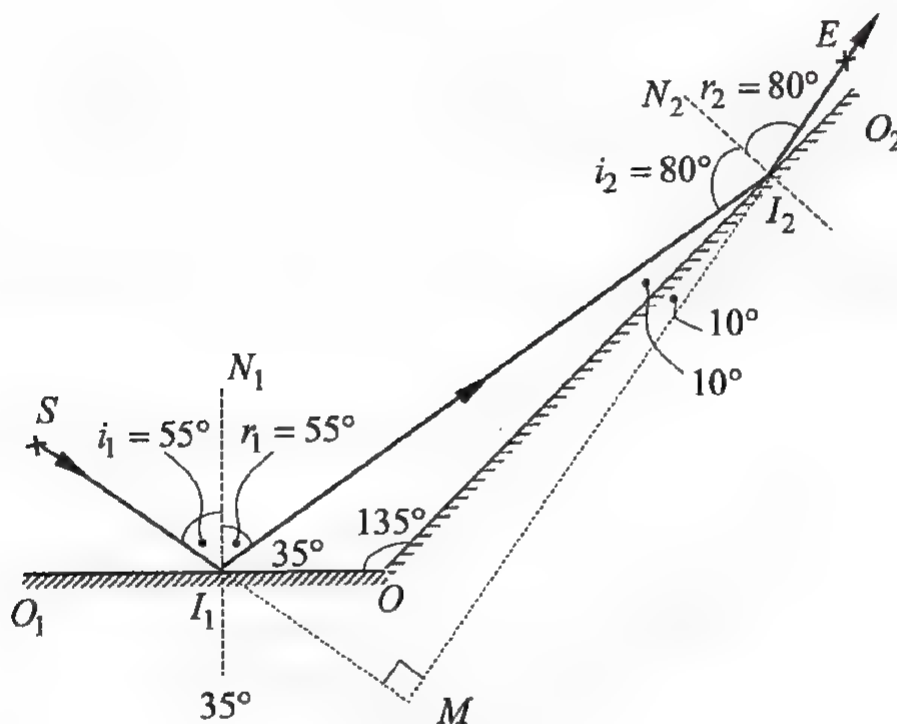
$$2(90^\circ - \alpha) + 2(90^\circ - \beta) + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 135^\circ \Rightarrow u = 135^\circ$$

de unde rezultă că, indiferent de unghiul de incidență, raza emergentă este perpendiculară pe cea incidentă dacă unghiul diedru alcătuit de cele două oglinzi plane este de  $135^\circ$

- prin urmare, pentru un unghi diedru mai mare de  $90^\circ$ , singura posibilitate care respectă cerințele este cea prezentată în situația 2

- refacem calculele pentru unghiul de incidență  $\alpha = 55^\circ$ :

$$i_1 = 55^\circ \Rightarrow r_1 = 55^\circ$$



- din geometria problemei:

$$m(\widehat{I_2 I_1 O}) = 90^\circ - r_1 = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

$$m(\widehat{I_1 I_2 O}) = 180^\circ - 35^\circ - 135^\circ = 10^\circ$$

$$m(\widehat{I_1 I_2 N_2}) = i_2 = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ = r_2$$

- se observă că:

$$m(\widehat{O I_1 M}) = m(\widehat{S I_1 M}) = 35^\circ (\text{opuse la vârf})$$



$$m(\widehat{I_2 I_1 M}) = m(\widehat{I_2 I_1 O}) + m(\widehat{O I_1 M}) = 70^\circ$$

$$m(\widehat{O I_2 M}) = m(\widehat{E I_2 O_2}) = 10^\circ (\text{opuse la vârf})$$

$$m(\widehat{I_1 I_2 M}) = m(\widehat{O I_2 M}) + m(\widehat{O I_2 I_1}) = 20^\circ$$

de unde rezultă:

$$m(\widehat{I_1 M I_2}) = 180^\circ - m(\widehat{I_2 I_1 M}) - m(\widehat{I_1 I_2 M}) = 90^\circ$$

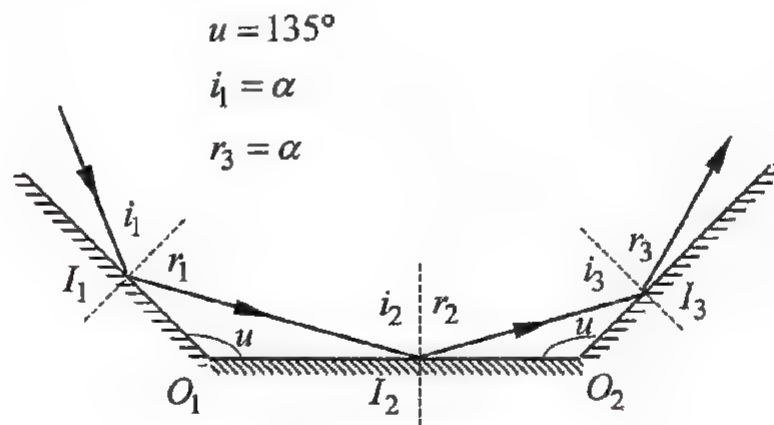
deci raza emergentă este perpendiculară pe raza incidentă

#### Problema nr. 4.

O rază de lumină cade pe un sistem de trei oglinzi plane, ca în figură. Care trebuie să fie valoarea unghiului de incidență, pentru ca acesta să fie egal cu unghiul de emergență?

#### Rezolvare

- situația este prezentată în figură:



- din geometria problemei, folosind legea a doua a reflexiei, rezultă:

$$m(\widehat{I_2 I_1 O_1}) = 90^\circ - \alpha$$

$$m(\widehat{I_1 I_2 O_1}) = 180^\circ - m(\widehat{I_2 I_1 O_1}) - m(\widehat{I_1 O_1 I_2}) = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 135^\circ = \alpha - 45^\circ$$

$$i_2 = 90^\circ - m(\widehat{I_1 I_2 O_1}) = 90^\circ - (\alpha - 45^\circ) = 135^\circ - \alpha \Rightarrow r_2 = 135^\circ - \alpha$$

$$m(\widehat{I_3 I_2 O_2}) = 90^\circ - r_2 = 90^\circ - (135^\circ - \alpha) = \alpha - 45^\circ$$

$$m(\widehat{I_2 I_3 O_2}) = 180^\circ - m(\widehat{I_3 I_2 O_2}) - m(\widehat{I_2 O_2 I_3}) = 180^\circ - (\alpha - 45^\circ) - 135^\circ$$

$$m(\widehat{I_2 I_3 O_2}) = 90^\circ - \alpha$$

- rezultă astfel:

$$i_3 = 90^\circ - m(\widehat{I_2 I_3 O_2}) = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha = r_3$$

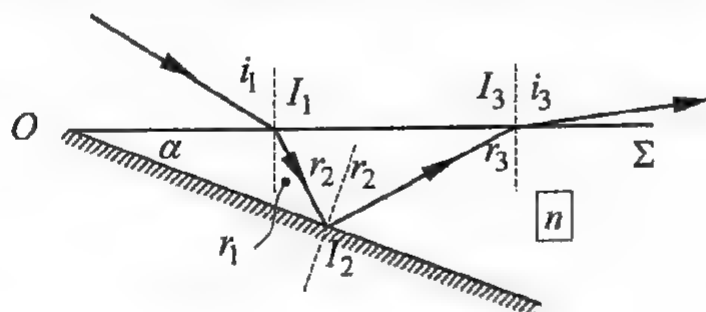
deci oricare ar fi unghiul de incidență acesta va fi egal cu unghiul de emergență, pentru sistemul considerat

### Problema nr. 5.

O rază de lumină provenind de la o sursă punctiformă situată în aer întâlnește suprafața plană  $\Sigma$  a unui bloc de sticlă având indicele de refracție  $n=1,5$ . După ce parcurge o anumită distanță în sticlă, ea suferă o reflexie pe o oglindă plană care face un unghi  $\alpha=25^\circ$  cu suprafața  $\Sigma$ . Cunoscând că incidența pe sticlă are loc sub un unghi  $i_1=60^\circ$ , stabiliți dacă este posibilă emergența sticlă-aer. Stabiliți valoarea unghiului  $\alpha$  pentru care să existe emergență sticlă-aer.

### Rezolvare

- se vor folosi notațiile din figura de mai jos:



- la refracția aer-sticlă, în punctul de incidență  $I_1$ :

$$n_{aer} \sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{n_{aer}}{n} \sin i_1 = \frac{1}{1,5} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r_1 \cong 35^\circ$$

- în triunghiul  $\Delta O I_1 I_2$ :

$$m(\widehat{I_1 O I_2}) + m(\widehat{O I_2 I_1}) + m(\widehat{I_2 I_1 O}) = 180^\circ$$

$$\alpha + (90^\circ - r_2) + (90^\circ + r_1) = 180^\circ \Rightarrow r_2 = \alpha + r_1 = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$$



- în triunghiul  $\Delta I_1 I_2 I_3$ :

$$m(\widehat{I_1 I_2 I_3}) + m(\widehat{I_2 I_3 I_1}) + m(\widehat{I_3 I_1 I_2}) = 180^\circ$$

$$2r_2 + (90^\circ - r_3) + (90^\circ - r_1) = 180^\circ \Rightarrow r_3 = 2r_2 - r_1 = 85^\circ$$

- la refracția sticlă-aer, în punctul de incidență  $I_3$ :

$$n \sin r_3 = n_{aer} \sin i_3 \Rightarrow \sin i_3 = \frac{n}{n_{aer}} \sin r_3 \cong 1,49 > 1$$

deci refracția sticlă-aer nu poate avea loc

### Observație

- dacă se ține cont de faptul că unghiul limită la refracția dintr-un mediu având indicele de refracție egal cu 1,5 în aer este de aproximativ  $42^\circ$ , se vede că  $r_3$  este mai mare decât acesta, deci va apărea reflexia totală

- pentru a avea rază emergentă, trebuie îndeplinită condiția:

$$r_3 < 42^\circ \Rightarrow 2r_2 - r_1 < 42^\circ \Rightarrow r_2 < 21^\circ + \frac{r_1}{2}$$

- ținând cont de expresia lui  $r_2$ , rezultă:

$$r_2 = \alpha + r_1 < 21^\circ + \frac{r_1}{2} \Rightarrow \alpha(i_1) < 21^\circ - \frac{r_1(i_1)}{2}$$

unde dependența  $r_1 = r_1(i_1)$  este dată de relația  $\sin r_1 = \frac{n_{aer}}{n} \sin i_1$

## CAPITOLUL 2. OGLINZI

Se numesc *oglinzi* sistemele optice care determină schimbarea direcției de propagare a luminii prin reflexie.

### 2.1. Oglinzi sferice

Oglinda a cărei față reflectătoare este o porțiune dintr-o sferă poartă numele de *oglină sferică*.

Oglinzile sferice pot fi convexe (divergente) sau concave (convergente). Ele sunt caracterizate de (figura 2.1):

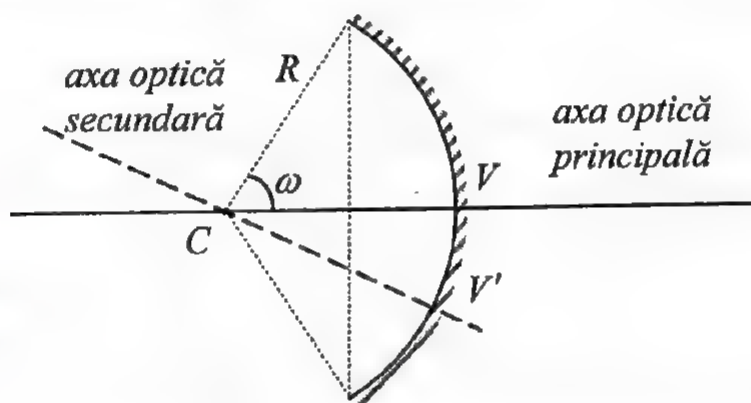


Figura 2.1. Elementele unei oglinzi sferice

- raza de curbură ( $R$ ), egală cu raza de curbură a sferei din care face parte oglinda
- centrul oglinzii ( $C$ ), care coincide cu centrul sferei din care face parte oglinda
- axa optică principală: dreapta care unește vârful  $V$  al calotei sferice cu centrul sferei ( $CV$ )
- axa optică secundară: dreapta care unește un punct al calotei sferice (diferit de vârf) cu centrul sferei
- deschiderea oglinzii: unghiul solid  $2\omega$  sub care se vede calota din centrul de curbură

Unghiul  $\omega$  este unghiul cel mai mare pe care îl poate face normala într-un punct oarecare al oglinzii cu axa optică.



## 2.2. Formarea imaginilor în oglinzi sferice

În cele ce urmează, se va studia formarea imaginilor în oglizile sferice, în condițiile unor fasciculele incidente largi.

### 2.2.1. Imaginea sagitală

Fie un obiect punctiform  $A_1$  situat pe axa optică principală a unei oglinzi sferice concave (figura 2.2).

Toate razele care cad pe oglindă sub același unghi de incidență  $i$  se întâlnesc după reflexie în  $A_2$ .

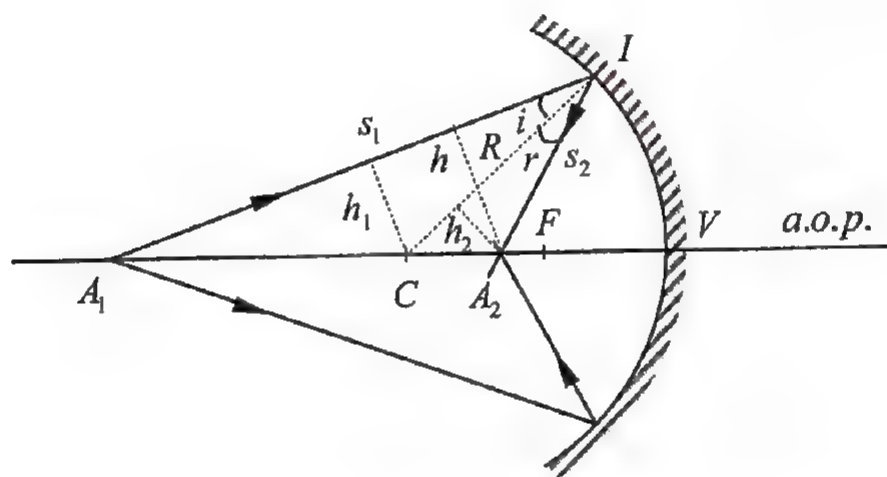


Figura 2.2. Formarea imaginii sagitale în oglinda sferică

Se formează astfel două conuri de raze, unul cu vârful în obiectul  $A_1$ , iar celălalt cu vârful în imaginea  $A_2$  (imaginea sagitală).

Cu notațiile din figură, se poate scrie:

$$S_{\Delta A_1 I A_2} = S_{\Delta A_1 I C} + S_{\Delta A_2 I C}$$

$$\frac{s_1 h_1}{2} + \frac{R h_2}{2} = \frac{s_1 h}{2}$$

$$\sin i = \frac{h_1}{R} \Rightarrow h_1 = R \sin i$$

$$\sin r = \frac{h_2}{s_2} \Rightarrow h_2 = s_2 \sin r$$

$$\sin(i+r) = \frac{h}{s_2} \Rightarrow h = s_2 \sin(i+r)$$

Se înlocuiește în suma ariilor și rezultă:

$$s_1 R \sin i + R s_2 \sin r = s_1 s_2 \sin(i+r)$$

$$s_1 R \sin i + R s_2 \sin r = s_1 s_2 (\sin i \cos r + \sin r \cos i)$$

Deoarece  $i = r$ , conform legii a doua a reflexiei, relația de mai sus devine:

$$s_1 R + R s_2 = 2 s_1 s_2 \cos i \quad | : s_1 s_2 R$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2 \cos i}{R}$$

relație care reprezintă *ecuația imaginii sagitale* pentru oglinzile sferice.

Conform acestui rezultat,  $s_2 = s_2(i)$ , deci poziția imaginii  $A_2$  depinde de valoarea unghiului  $i$ . Variind  $i$ , imaginea  $A_2$  se va deplasa pe axa  $A_1 C A_2$ , descriind un segment de dreaptă, numit *focala sagitală* (*radială*).

### Observații

1. Oglinda sferică nu prezintă stigmatism pentru fascicule largi, unui punct obiect corespunzându-i o focală sagitală, determinată de valorile unghiului de incidență

2. Dacă unghiurile de incidență sunt foarte mici,  $\cos i \approx 1$ , iar ecuația imaginii sagitale devine:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{R}$$

deci  $s_2 \neq s_2(i)$ ; poziția imaginii sagitale nu depinde de unghiul de incidență.

Condiția ca unghiurile de incidență să fie foarte mici implică existența unui fascicul incident foarte îngust, cuprinzând raze foarte apropiate de axa optică principală a oglinzii și definește așa-numita aproximație a razelor paraxiale a lui Gauss. Rezultă astfel că oglinzile sferice prezintă un stigmatism aproximativ, convenabil, în această aproximație.



3. Dacă raza  $R$  a oglinzii sferice este foarte mare, practic  $R \rightarrow \infty$ , atunci se spune că oglinda este plană. În acest caz, ecuația imaginii sagitale devine:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 0 \Rightarrow s_2 = -s_1$$

Este important faptul că  $s_2 \neq s_2(i)$ , adică poziția imaginii sagitale nu depinde de unghiul de incidență; implicit, ea nu depinde de deschiderea fascicolului, deci oglinda plană este stigmatică pentru orice punct obiect. Mai mult, imaginea este simetrica obiectului față de oglindă, formându-se la aceeași distanță față de oglindă ca și obiectul, dar de cealaltă parte a acesteia.

4. Ecuația imaginii sagitale a oglinzilor sferice se poate obține din ecuația imaginii sagitale a dioptrului sferic, punând condiția ca raza emergentă să se reflecte ( $n_2 = -n_1$ ).

### 2.2.2. Imaginea tangențială

Razele din figura 2.2 pot fi grupate și altfel.

Fie două raze care pleacă din punctul  $A$ , aflate în același plan meridian (care cuprinde axa optică și razele incidente), dar care fac unghiuri diferite cu normala (figura 2.3). După reflexie, acestea se întâlnesc în  $T$  (imaginea tangențială, meridională).

Punctele de incidență  $I_1$  și  $I_2$  se consideră foarte apropiate.

Se notează cu  $u_1$ , respectiv  $u_1 + du_1$ , unghiurile pe care le fac cele două raze incidente cu axa optică, iar unghiurile pe care le fac cele două raze reflectate cu axa optică cu  $u_2$ , respectiv  $u_2 + du_2$ .

Unghiul  $\omega$  este unghi exterior triunghiului  $\Delta AI_1C$ :

$$\omega = u_1 + i$$

Unghiul  $u_2$  este unghi exterior triunghiului  $\Delta A_1I_1C$ :

$$u_2 = \omega + i = \omega + i$$

Comparând relațiile, rezultă:

$$2\omega = u_1 + u_2$$

respectiv, prin diferențierea relației de mai sus:

$$2d\omega = du_1 + du_2$$

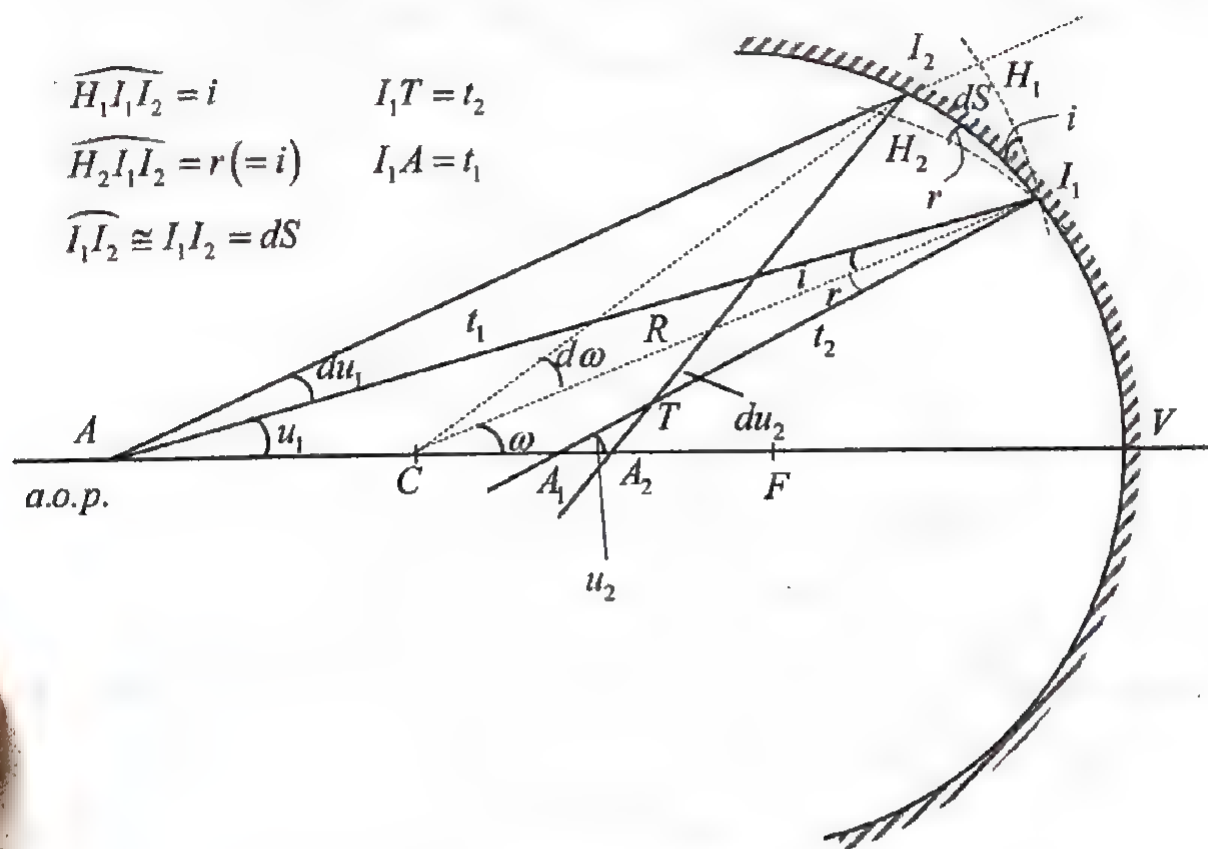


Figura 2.3. Formarea imaginii tangențiale în oglinda sferică

Pentru a obține o legătură între distanțele  $t_1$  și  $t_2$ , se construiește un arc de cerc de rază  $t_1$ , având centrul în  $A$ . Acesta intersectează raza  $AI_2$  în  $H_1$ . Unghiurile care se formează fiind mici,  $\widehat{I_2I_1H_1} = i$ , arcul  $\widehat{I_1I_2}$  corespunde unghiului la centru  $d\omega$ , iar arcul  $\widehat{I_1H_1}$  corespunde unghiului la centru  $du_1$ .

În triunghiul  $\Delta I_1I_2H_1$ , considerat dreptunghic în  $H_1$ , se poate scrie:

$$\cos i = \frac{I_1H_1}{I_1I_2} \Rightarrow I_1H_1 = I_1I_2 \cos i = dS \cos i$$

Se observă că triunghiul  $\Delta I_1AH_1$  este isoscel ( $I_1A \equiv AH_1 = t_1$ ) și, conform figurii 2.4:



$$\sin \frac{du_1}{2} = \frac{\frac{I_1 H_1}{2}}{I_1 A} \Rightarrow du_1 = \frac{I_1 H_1}{I_1 A} = \frac{I_1 H_1}{t_1}$$

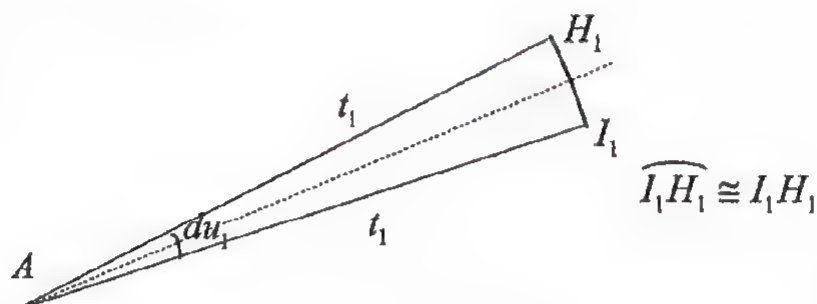


Figura 2.4. Evidențierea triunghiului  $\Delta I_1 A H_1$ , folosit pentru determinarea lui  $du_1$

unde s-a folosit faptul că, pentru unghiuri  $\alpha$  mici, exprimate în radiani,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ; rezultă astfel:

$$du_1 = \frac{dS \cos i}{t_1}$$

Analog, în  $\Delta I_1 I_2 C$ , isoscel ( $I_2 C \equiv I_1 C = R$ ), se poate scrie conform figurii 2.5:

$$\left. \begin{array}{l} \sin d\omega = \frac{I_1 I_2}{C I_1} \approx d\omega \\ C I_1 = R \end{array} \right\} \Rightarrow d\omega = \frac{dS}{R}$$

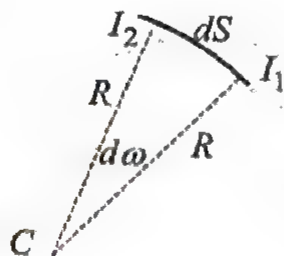


Figura 2.5. Evidențierea triunghiului  $\Delta I_1 I_2 C$ , folosit pentru determinarea lui  $d\omega$

Se construiește un arc de cerc cu centrul în  $T$  și cu raza  $t_2$  și se obține punctul  $H_2$  la intersecția cu  $A_2I_2$ . Din triunghiul  $\Delta I_1I_2H_2$  curbiliniu, considerat dreptunghic în  $H_2$ , rezultă:

$$\cos r = \frac{I_1 H_2}{I_1 I_2} \Rightarrow I_1 H_2 = I_1 I_2 \cos r = dS \cos r = dS \cos i$$

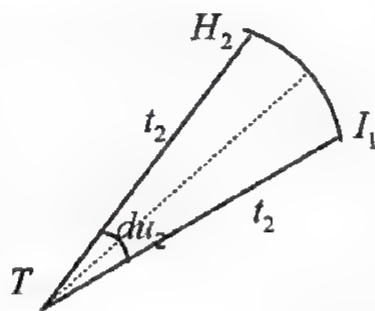


Figura 2.6. Evidențierea triunghiului  $\Delta I_1TH_2$ , folosit pentru determinarea lui  $du_2$

iar în  $\Delta I_1TH_2$ , isoscel ( $I_1T \equiv TH_2$ , figura 2.6):

$$\sin \frac{du_2}{2} = \frac{\frac{I_1 H_2}{2}}{I_1 T} \Rightarrow du_2 = \frac{I_1 H_2}{I_1 T} = \frac{I_1 H_2}{t_2}$$

de unde, cunoscând expresia lui  $I_1 H_2$ , rezultă:

$$du_2 = \frac{dS \cos i}{t_2}$$

Cu ajutorul relațiilor obținute pentru  $d\omega$ ,  $du_1$  și  $du_2$  se poate scrie:

$$2 \frac{dS}{R} = \frac{dS \cos i}{t_1} + \frac{dS \cos i}{t_2} \quad | : dS \cos i$$

$$\frac{2}{R \cos i} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$

Această relație poartă numele de *ecuația imaginii tangențiale* și dă poziția imaginii tangențiale.

Dacă se deplasează planul meridian în care se află razele  $AI_1$  și



$AI_2$  (care au condus la formarea imaginii  $T$ ), la stânga și la dreapta poziției inițiale, punctul  $T$  descrie un mic segment de dreaptă, numit *focala tangențială*, perpendiculară pe poziția mijlocie a planului meridian și, deci, perpendiculară pe focala sagitală care se află în acest plan.

### Observații

1. Existența focalei tangențiale ne arată că oglinda sferică nu prezintă stigmatism pentru fascicule largi, situate în același plan meridian, unui punct obiect corespunzându-i o imagine tangențială, determinată de valorile diferite ale unghiului de incidență

2. Dacă unghiurile de incidență sunt foarte mici,  $\cos i \approx 1$ , iar ecuația imaginii tangențiale devine:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{2}{R}$$

deci  $t_2 \neq t_2(i)$ . Aceasta înseamnă, pe de o parte, că poziția imaginii tangențiale nu depinde de unghiul de incidență, iar pe de altă parte, că suntem în condițiile aproximației razelor paraxiale a lui Gauss. Rezultă astfel că în aceste condiții, oglinzile sferice prezintă un stigmatism aproximativ, convenabil.

Comparând acest rezultat cu ecuația imaginii sagitale pentru oglinda sferică, în aproximația razelor paraxiale, se observă că se pot pune condițiile:

$$s_1 = p_1 = t_1 = \text{distanța oglindă-obiect}$$

$$s_2 = p_2 = t_2 = \text{distanța oglindă-imagine}$$

de unde rezultă ecuația punctelor conjugate (obiect - imagine !) pentru oglinzile sferice în aproximația lui Gauss:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{R}$$

3. Dacă raza  $R$  a oglinzii sferice este foarte mare, practic  $R \rightarrow \infty$ , atunci oglinda este plană; ecuația imaginii tangențiale devine:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 0 \Rightarrow t_2 = -t_1$$

rezultat din care se reține faptul că  $t_2 \neq t_2(i)$ , adică poziția imaginii tangențiale nu depinde de unghiul de incidență; implicit, nu depinde de deschiderea fascicolului, deci oglinda plană este stigmatică pentru orice punct obiect, imaginea fiind și de această dată simetrica obiectului față de oglindă, formându-se la aceeași distanță față de oglindă ca și obiectul, dar de cealaltă parte a oglinzii.

4. Ecuația imaginii tangențiale a oglinzilor sferice se poate obține din ecuația imaginii tangențiale a dioptrului sferic, punând condiția ca raza emergentă să se reflecte, adică  $n_2 = -n_1$ .

### 2.3. Oglinzi sferice în aproximația lui Gauss

Așa cum s-a arătat deja, în aproximația lui Gauss, razele de lumină cad pe oglindă sub un unghi de incidență mic ( $\omega < 5^\circ$ , unde  $2\omega$  reprezintă deschiderea oglinzii). Studiind formarea imaginilor sagitală, respectiv tangențială în această situație, s-a observat că ecuațiile corespunzătoare conduc la o formă unică (ecuația punctelor conjugate)

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{R}$$

unde  $x_1$ , respectiv  $x_2$  reprezintă distanțele oglindă-obiect, respectiv oglindă-imagine.

#### 2.3.1. Caracterizarea oglinzilor

Razele incidente, paralele cu axa optică principală, se strâng după reflexie într-un singur punct, numit *focar principal imagine al oglinzii*, a cărui poziție se determină folosind ecuația punctelor conjugate:

$$x_1 \rightarrow \infty \Rightarrow f_2 = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_2 = \frac{R}{2}$$

Dacă de la un obiect punctiform, situat pe axa optică principală, pornesc raze de lumină care, după reflexie, părăsesc oglinda paralel cu axa optică principală, spunem că obiectul este situat în *focarul principal obiect* al oglinzii sferice:



$$x_2 \rightarrow \infty \Rightarrow f_1 = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_1 = \frac{R}{2}$$

situat și el la jumătatea distanței dintre vârf și centru, la fel ca și focarul principal imagine. Acest rezultat putea fi anticipat, pornind de la simplul considerent că oglinda sferică este un sistem optic în care imaginile se formează pe baza reflexiei, deci prin întoarcerea razei de lumină în mediul din care a venit.

Se poate formula concluzia că o oglindă sferică are un singur focar, situat la jumătatea distanței dintre vârf și centru (figura 2.7).

$$f = \frac{CV}{2} = \frac{R}{2}$$

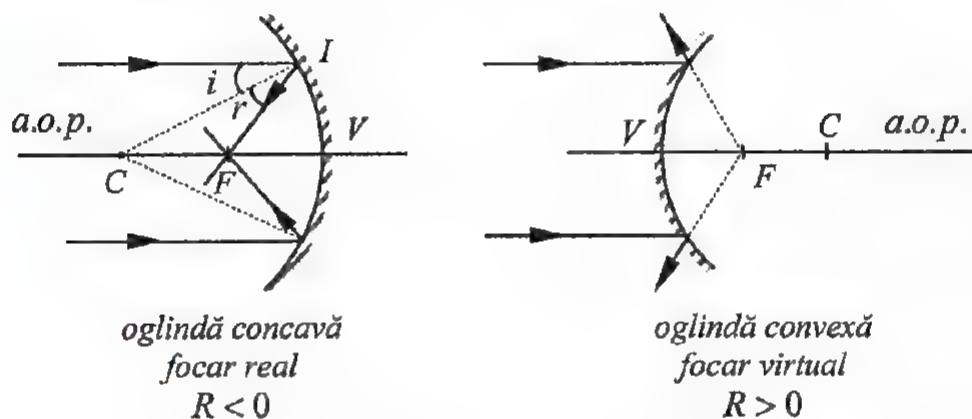


Figura 2.7. Stabilirea poziției focarului principal al oglinzii sferice

Este utilă menționarea și respectarea unei reguli de semne care corelează semnele distanțelor măsurate pe axa optică principală cu sensul în care se citesc acestea, pornind de la vârful oglinzii. Astfel, distanțele citite de la oglindă spre dreapta sunt pozitive, iar cele citite de la oglindă spre stânga sunt negative.

Pe verticală, distanțele citite de la axa optică în sus sunt considerate pozitive, iar cele citite de la axă în jos, sunt considerate negative.

Cu această regulă, oglinzile sferice din figura 2.7 pot fi caracterizate după cum urmează (tabelul 2.1):

Tabelul 2.1. Caracterizarea oglinzilor sferice

Nr. crt.	Denumirea oglinzii	Semnul razei	Semnul distanței focale	Caracterizarea focarului	Tipul oglinzii
1	concavă	$R < 0$	$f = \frac{R}{2} < 0$	focar real	convergentă
2	convexă	$R > 0$	$f = \frac{R}{2} > 0$	focar virtual	divergentă

Dacă fascicolul paralel incident este înclinat față de axa optică principală (figura 2.8), focarul conjugat acestei direcții se află în  $F'$ , în planul perpendicular dus prin focarul principal  $F$  (plan focal al oglinzii).

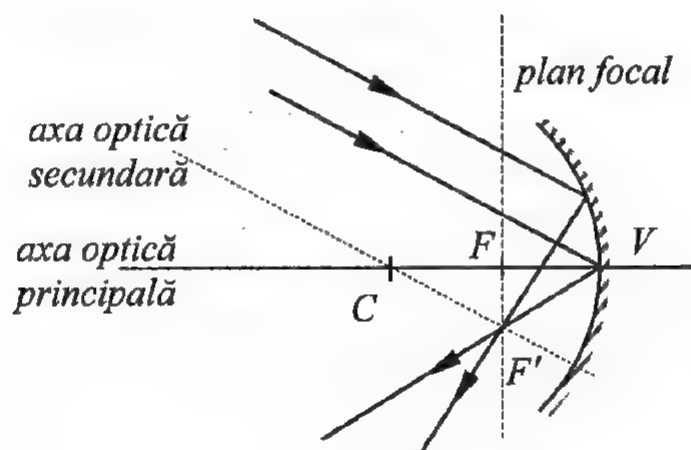


Figura 2.8. Stabilirea poziției focarelor secundare ale oglinzilor sferice

### 2.3.2. Formarea imaginilor

Fie un obiect liniar  $A_1B_1$ , situat în fața unei oglinzi sferice concave, perpendicular pe axa optică principală. Imaginea  $A_2B_2$  se obține aplicând câteva reguli de construire a imaginilor prin oglinzi sferice (figura 2.9):

1. raza incidentă paralelă cu axa optică principală, după reflexie trece prin focar
2. raza incidentă care trece prin focar, după reflexie se propagă paralel cu axa optică principală
3. raza incidentă care trece prin centrul oglinzii, după reflexie se



propagă pe același drum, deci va trece tot prin centrul oglinzii

Cu notațiile din figura 2.9, ținând cont că  $\Delta A_1 B_1 C \sim \Delta A_2 B_2 C$ , se poate scrie:

$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{A_1 C}{A_2 C} = \frac{-x_1 - (-2f)}{-2f - (-x_2)} = \frac{-x_1 + 2f}{-2f + x_2}$$

Dar și  $\Delta A_1 B_1 V \sim \Delta A_2 B_2 V$ :

$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{VA_1}{VA_2} = \frac{-x_1}{-x_2}$$

și rezultă astfel că:

$$\frac{x_1 - 2f}{2f - x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

$$2x_1 x_2 = 2f(x_1 + x_2) \quad | : 2x_1 x_2$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

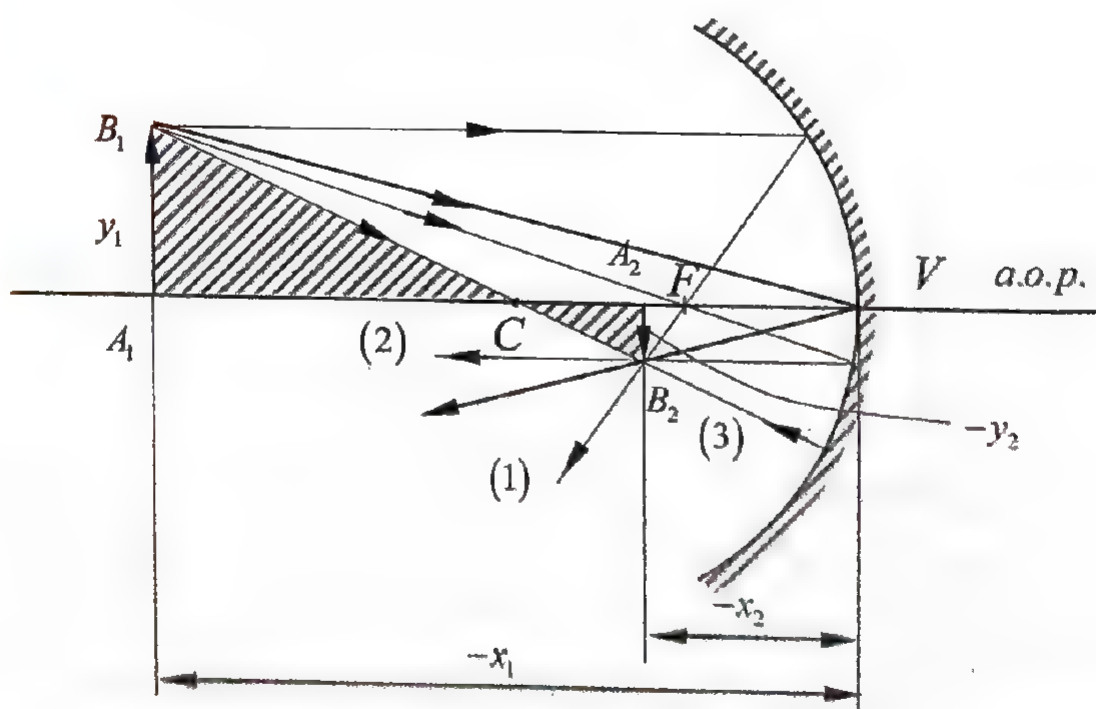


Figura 2.9. Formarea imaginii unui obiect perpendicular pe axa optică principală într-o oglindă sferică concavă și ilustrarea regulilor de formare a imaginilor în oglinzi sferice

Relația de mai sus poartă numele de **formula oglinzilor sferice** (ecuația punctelor conjugate). Se observă că s-a obținut prin calcul direct un rezultat anticipat deja, prin compararea formei ecuațiilor sagitală și tangențială în cazul fasciculelor înguste.

Dacă se consideră focarul  $F$  drept origine a segmentelor care definesc poziția obiectului și a imaginii (figura 2.10), distanțele nu se mai supun regulii de semne enunțate anterior, iar calculele de mai sus se fac astfel:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_1 B_1 C \sim \Delta A_2 B_2 C &\Rightarrow \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{A_1 C}{A_2 C} = \frac{p_1 - f}{f - p_2} \\ \Delta A_1 B_1 V \sim \Delta A_2 B_2 V &\Rightarrow \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{V A_1}{V A_2} = \frac{p_1 + f}{f + p_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_1 - f}{f - p_2} = \frac{p_1 + f}{f + p_2}$$

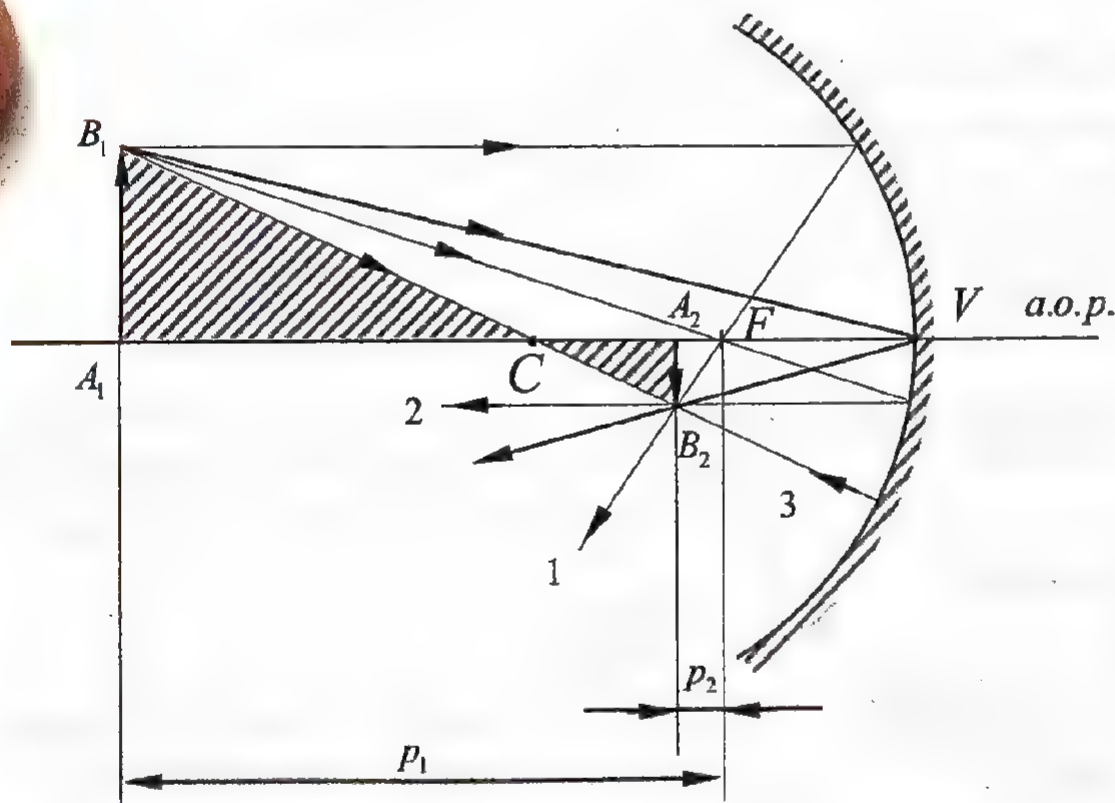


Figura 2.10. Formarea imaginii unui obiect perpendicular pe axa optică principală într-o oglindă sferică concavă.

Deducerea ecuației lui Newton

$$\cancel{p_1 f} + p_1 p_2 - f^2 - \cancel{f p_2} = \cancel{f p_1} + f^2 - p_1 p_2 - \cancel{p_2 f}$$

de unde rezultă:

$$f^2 = p_1 p_2$$

adică *ecuația lui Newton*.

Raportul dintre mărimea imaginii și mărimea obiectului se numește *mărirea liniară*. Cu notațiile din figura 2.9, conform celui de al doilea raport de asemănare:

$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{V A_1}{V A_2} = \frac{-x_1}{-x_2} \Rightarrow \frac{y_1}{-y_2} = \frac{-x_1}{-x_2}$$

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{x_2}{x_1}$$

Corelația dintre semnul măririi liniare transversale și tipul imaginii obținute prin oglinda sferică poate fi observată în tabelul 2.2:

Tabelul 2.2. Corelarea semnelui măririi liniare transversale cu tipul imaginii obținute prin oglinda sferică

	Cazul 1	Cazul 2
<b>Poziția obiectului față de oglindă</b>	$x_1 < 0$ (obiect situat în spațiul obiect, obiect real)	$x_1 < 0$ (obiect situat în spațiul obiect, obiect real)
<b>Poziția imaginii față de oglindă</b>	$x_2 < 0$ (image situată în spațiul obiect, image reală)	$x_2 > 0$ (image situată în spațiul imagine, image virtuală)
<b>Semnul lui <math>\beta = -\frac{x_2}{x_1}</math></b>	$\beta < 0$ (image reală)	$\beta > 0$ (image virtuală)
<b>Poziția obiectului față de axa optică principală</b>	$y_1 > 0$ (obiect situat deasupra axei optice principale, obiect real)	$y_1 > 0$ (obiect situat deasupra axei optice principale, obiect real)
<b>Poziția imaginii față de axa optică principală</b>	$y_2 < 0$ (image situată sub axa optică principală, image reală)	$y_2 > 0$ (image situată sub axa optică principală, image virtuală)
<b>Semnul lui <math>\beta = \frac{y_2}{y_1}</math></b>	$\beta < 0$ (image reală)	$\beta > 0$ (image virtuală)
<b>Tipul imaginii</b>	image reală	image virtuală



### Observații

1. Folosind relațiile oglinzilor sferice în care se face trecerea la limită:  $R \rightarrow \infty$  (oglinzi plane !), se obține:

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow f \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

ceea ce arată că obiectul și imaginea acestuia în oglinda plană sunt situate de o parte și de alta a oglinzii, la egală depărtare de aceasta. În plus, unui obiect real ( $x_1 < 0$ ) îi corespunde o imagine virtuală ( $x_2 > 0$ ), iar unui obiect virtual ( $x_1 > 0$ ) îi corespunde o imagine reală ( $x_2 < 0$ ); cu alte cuvinte, imaginea dată de o oglindă plană nu poate fi de aceeași natură cu obiectul.

2. Folosind regulile de construire a imaginilor în oglinzile sferice, rezultă următoarele:

a) în cazul oglinzilor sferice concave (tabelul 2.3):

- obiectele situate dincolo de focarul oglinzii au o imagine reală (situată în fața oglinzii)
- imaginea obiectului situat în focarul oglinzii se formează la infinit
- obiectele situate între focar și oglindă vor avea o imagine virtuală (situată în spatele oglinzii)

b) în cazul oglinzilor sferice convexe (figura 2.11)

- oglinzile sferice convexe formează numai imagini virtuale, indiferent de poziția obiectului luminos
- imaginile sunt mai mici decât obiectul

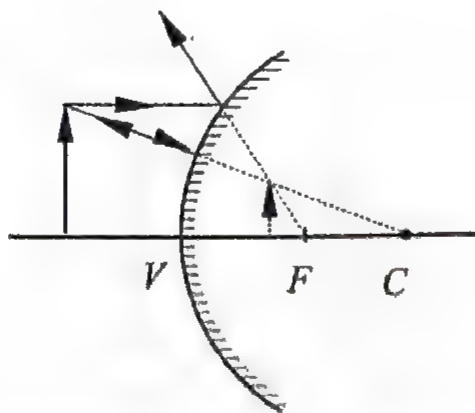
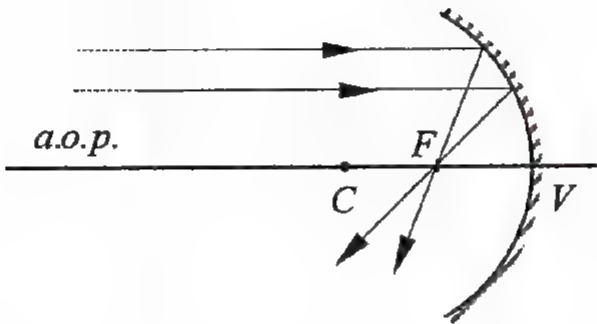
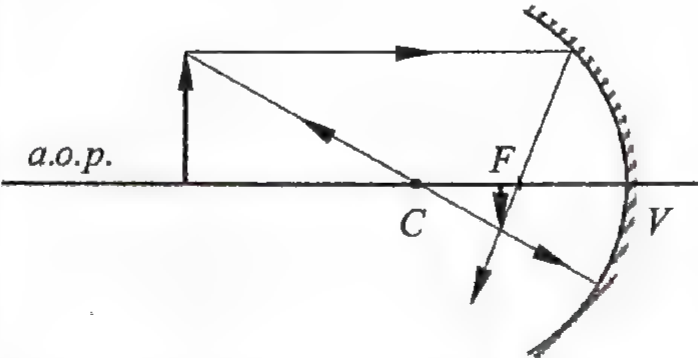
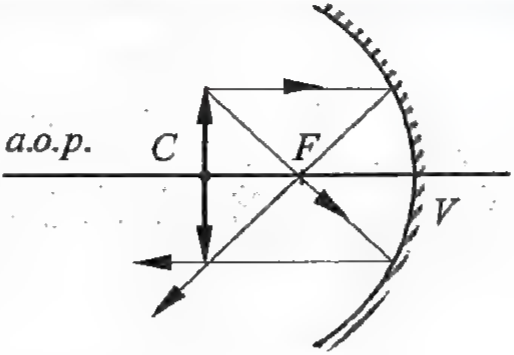
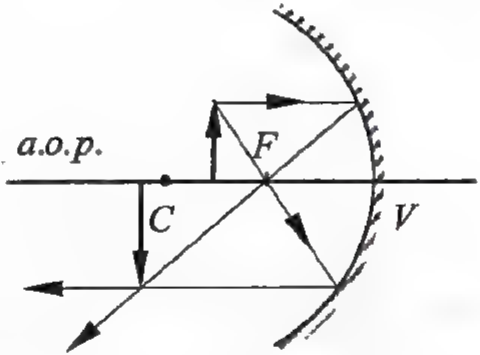


Figura 2.11. Formarea imaginilor în oglinda sferică convexă

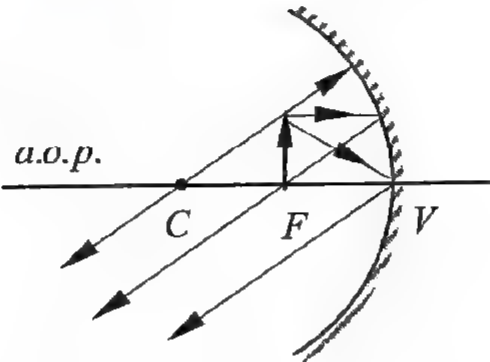
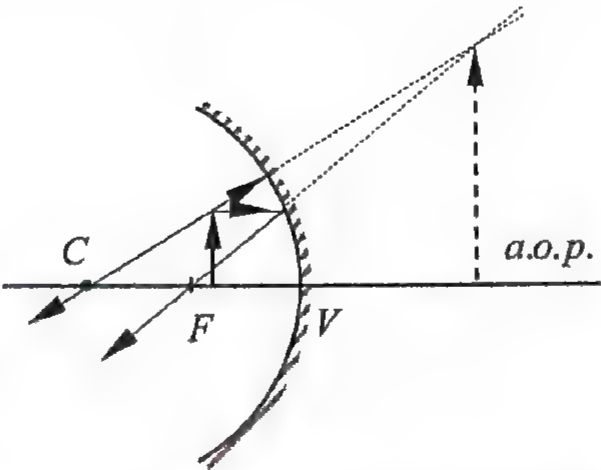
Tabelul 2.3. Formarea imaginilor în oglinda sferică concavă

Nr. crt.	Poziția obiectului	Formarea imaginii	Caracterizarea imaginii
1	- la infinit		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- punctiformă (se obține focarul oglinzii)</li> </ul>
2	- dincolo de centrul de curbură		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- răsturnată</li> <li>- mai mică decât obiectul</li> </ul>

3	- în centrul de curbură		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- răsturnată</li> <li>- egală ca mărime cu obiectul</li> </ul>
4	- între focar și centru		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- răsturnată</li> <li>- mai mare decât obiectul</li> </ul>



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

5	- în focar		<ul style="list-style-type: none"><li>- reală</li><li>- formată la infinit</li><li>- mărime infinită</li></ul>
6	- între oglindă și focar		<ul style="list-style-type: none"><li>- virtuală</li><li>- dreaptă</li><li>- mai mare decât obiectul</li></ul>

## 2.4. Oglinzi plane

Se numește *oglindă plană* o suprafață plană foarte netedă (de obicei metalică sau metalizată), care reflectă aproape integral lumina care cade pe ea (figura 2.12).

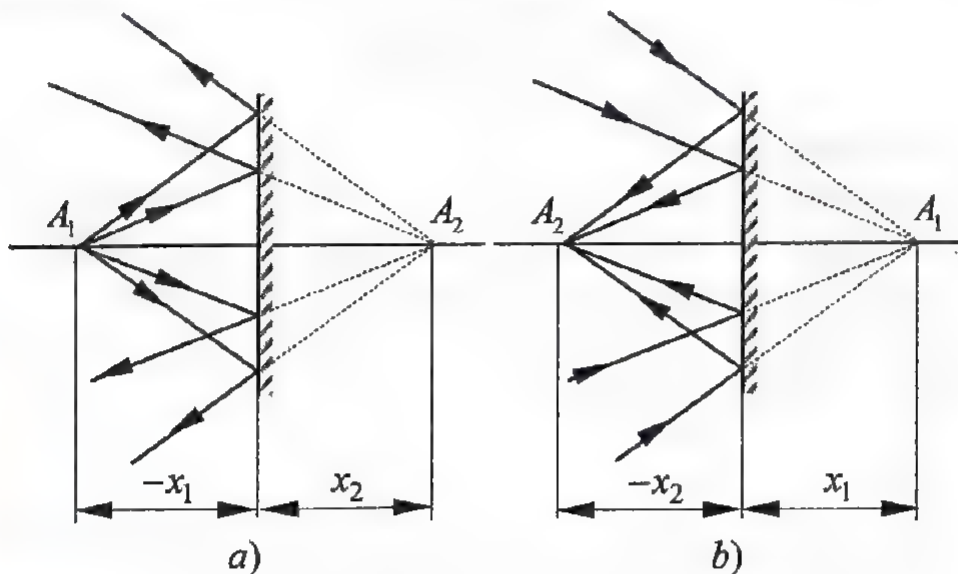


Figura 2.12. Formarea imaginilor în oglinda plană

Urmărind mersul razelor de lumină, conform legilor reflexiei, se observă că obiectul real  $A_1$  are o imagine virtuală  $A_2$  în oglinda plană (figura 2.12.a), în timp ce obiectul virtual are o imagine reală (figura 2.12.b), așa cum s-a văzut deja, prin particularizarea relației punctelor conjugate a oglinzilor sferice la  $R \rightarrow \infty$ .

Dacă se ține cont de relația  $x_2 = -x_1$ , mărirea liniară transversală a oglinzilor plane devine:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{-x_1}{x_1} = 1 \Rightarrow y_2 = y_1$$

adică imaginea este egală cu obiectul

În concluzie:

- imaginea  $A_2$  a unui punct  $A_1$  se obține la intersecția razelor reflectate de oglindă care au pornit din  $A_1$  (sau la prelungirea acestora)
- intersecția poate fi reală sau virtuală, după cum fascicolul reflectat este convergent sau divergent
- oglinda plană este riguros stigmatică

- imaginea unui obiect luminos este simetrica obiectului față de oglindă, dar simetria este specială:

- imaginea este egală cu obiectul
- imaginea nu poate fi suprapusă peste obiect prin nici o operație geometrică de translație sau rotație

## 2.5. Aplicații

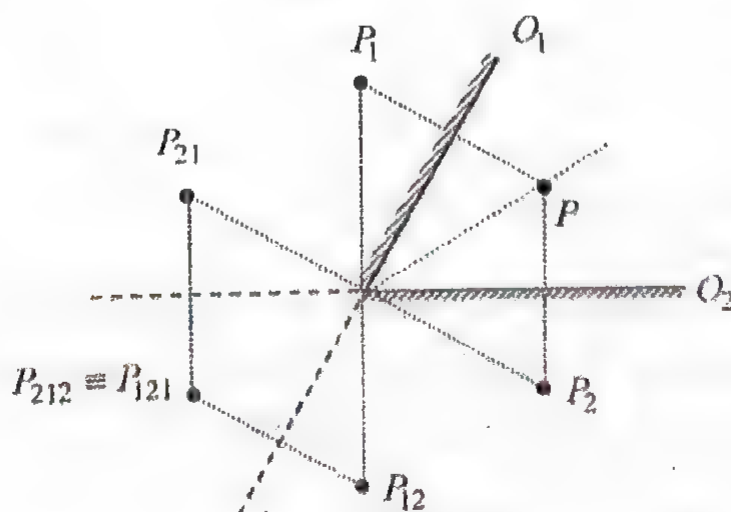
### Problema nr. 1.

Între două oglinzi plane care fac un unghi diedru de  $60^\circ$ , la egală distanță de ele, se află un obiect luminos punctiform. Să se determine prin construcție grafică imaginile acestuia prin sistemul de oglinzi. Ce s-ar întâmpla dacă punctul obiect nu s-ar afla la egală distanță de cele două oglinzi ?

### Rezolvare

Vom folosi faptul că imaginea punctului obiect  $P$  în una din oglinzi devine obiect pentru cealaltă oglindă. Astfel:

- $P_1$  este imaginea punctului  $P$  în oglinda  $O_1$
- imaginea lui  $P_1$  în oglinda  $O_2$  este  $P_{12}$
- imaginea lui  $P_{12}$  este  $P_{121}$
- $P_2$  este imaginea punctului  $P$  în oglinda  $O_2$
- imaginea lui  $P_2$  în oglinda  $O_1$  este  $P_{21}$
- imaginea lui  $P_{21}$  este  $P_{121}$

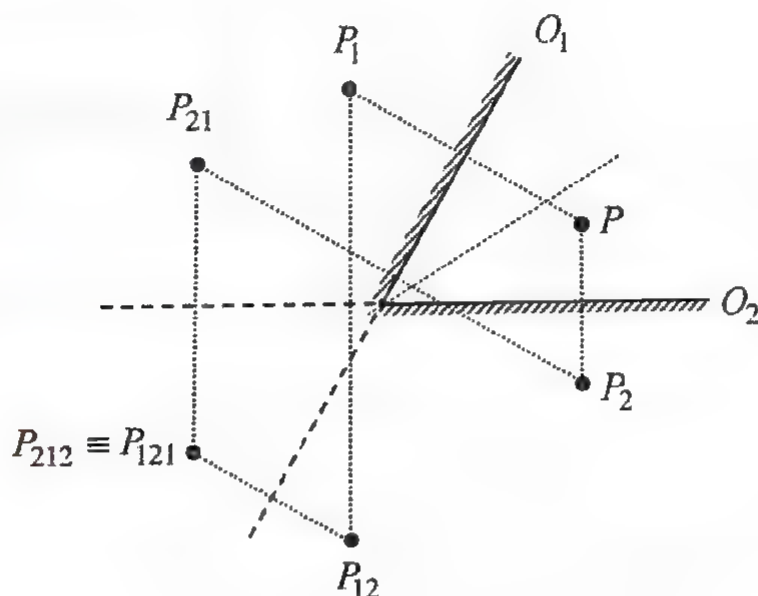




Prin urmare, se formează 5 imagini ale obiectului  $P$ . Rezultatul ascultă de relația:

$$\frac{360^\circ}{\alpha} - 1 = \frac{360^\circ}{60^\circ} - 1 = 5$$

În cazul în care poziția punctului obiect ar fi alta decât în cazul descris mai sus, situația ar fi următoarea:



Deoarece principiul de formare a imaginilor prin sistemul de oglinzi considerat este același, răspunsul este că nu se întâmplă nimic deosebit! Dacă unghiul diedru format de oglinzi este de  $60^\circ$ , se formează cinci imagini, indiferent de poziția obiectului situat, desigur, între oglinzi ...

### Problema nr. 2.

Stabiliți în ce condiții imaginea unui obiect real printr-o oglindă sferică concavă este de două ori mai mare decât obiectul.

### Rezolvare

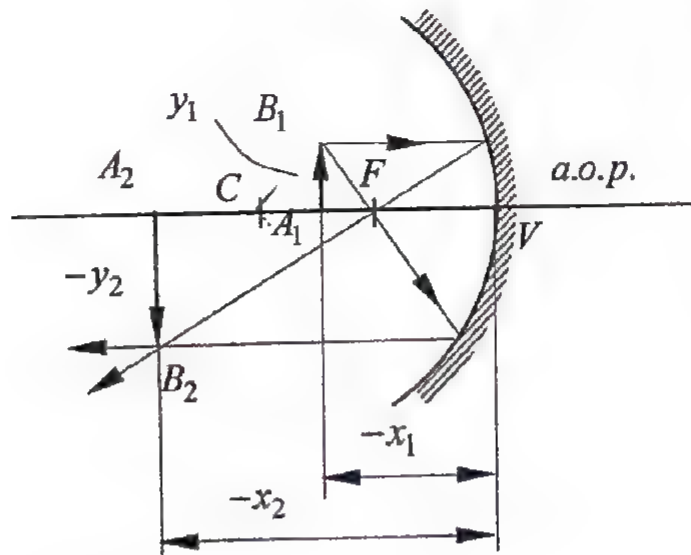
- în cazul în care imaginea se consideră reală, se poate scrie:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{x_2}{x_1} = -2 \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

- folosind ecuația punctelor conjugate, rezultă:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{3}{2x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{3f}{2} = f + \frac{1}{2}f (< 0)$$

adică obiectul trebuie să fie situat la jumătatea distanței dintre centrul și focarul oglinzii:

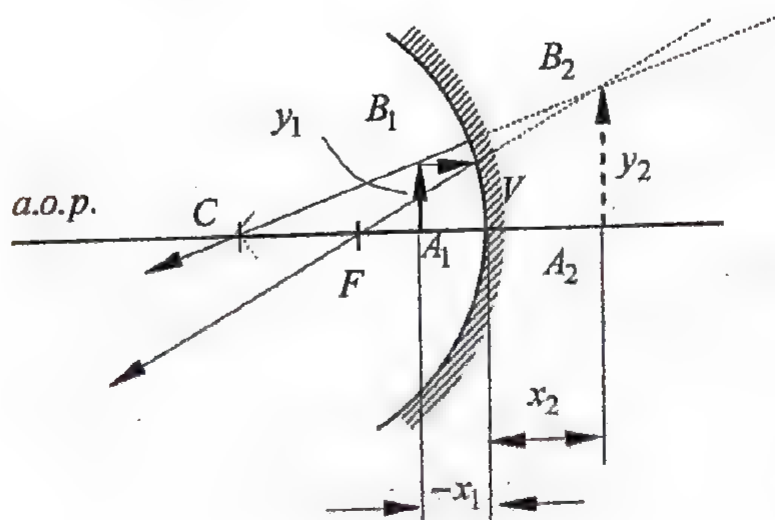


- se observă că poziția imaginii este:

$$x_2 = 2 \cdot \frac{3f}{2} = 3f$$

- în cazul unei imagini virtuale:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{x_2}{x_1} = 2 \Rightarrow x_2 = -2x_1$$



$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{-2x_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{2x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{f}{2} = (< f, < 0)$$

adică obiectul trebuie să fie situat în fața oglinzii, la o distanță egală cu jumătatea distanței focale (față de vârf)

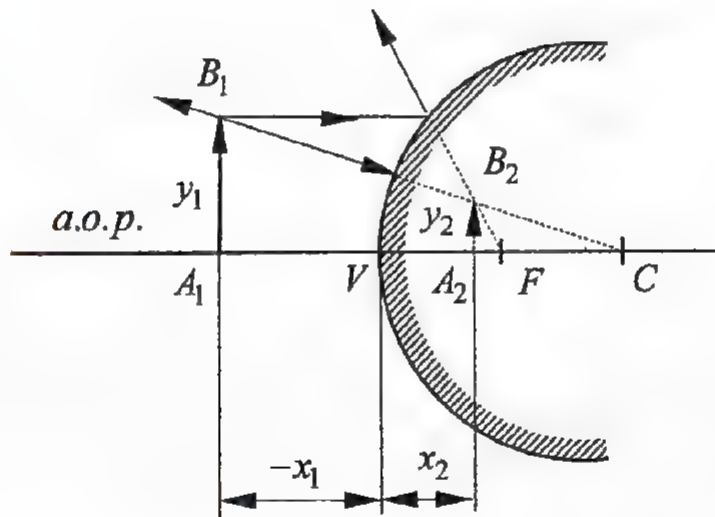
- poziția imaginii este:

$$x_2 = -2 \cdot \frac{f}{2} = -f (> 0)$$

### Problema nr. 3.

Arătați că imaginea unui obiect real, formată de o oglindă sferică convexă, nu poate fi reală, indiferent de poziția obiectului.

### Rezolvare



- din ecuația punctelor conjugate se obține:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{x_1 - f}$$

- oglinda fiind convexă,  $f > 0$  (distanța focală se măsoară de la vârf spre dreapta)

- obiectul fiind real, el este situat în spațiul obiect, deci  $x_1 < 0$

- rezultă astfel:

$$\left. \begin{array}{l} fx_1 < 0 \\ x_1 - f < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 > 0$$

deci imaginea se formează în spatele oglinzii, fiind astfel virtuală



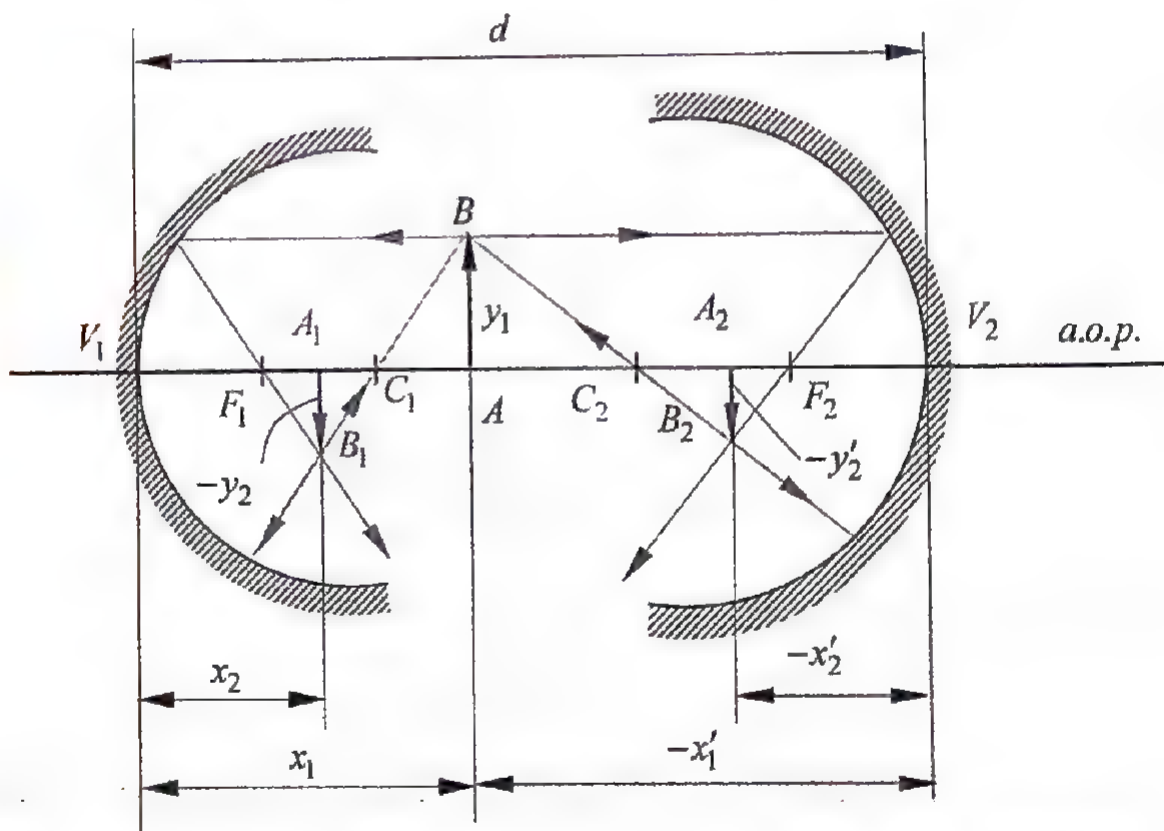
(indiferent de poziția  $x_1$  a obiectului)

#### Problema nr. 4.

Un obiect este plasat între două oglinzi sferice, perpendicular pe axa optică principală, comună, a acestora. Cunoscând că ambele oglinzi sunt convergente, stabiliți poziția exactă a obiectului, pentru ca imaginile sale în cele două oglinzi să aibă aceeași mărime. Aplicație numerică:  $R_1 = 20\text{ cm}$ ,  $R_2 = 25\text{ cm}$ ,  $d = 60\text{ cm}$ .

#### Rezolvare

- se va determina distanța  $x_1$  dintre prima oglindă și obiect
- imaginea dată de prima oglindă se caracterizează astfel:



$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R_1} \Rightarrow x_2 = \frac{R_1 x_1}{2x_1 - R_1}$$

$$(\beta_1 =) -\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = -y_1 \frac{x_2}{x_1} = -\frac{y_1 R_1}{2x_1 - R_1}$$

- pentru imaginea formată de a doua oglindă se poate scrie:

$$\frac{1}{x'_2} + \frac{1}{x'_1} = \frac{2}{R_2} \Rightarrow x'_2 = \frac{R_2 x'_1}{2x'_1 - R_2}$$

$$(\beta_2 =) -\frac{x'_2}{x'_1} = \frac{y'_2}{y_1} \Rightarrow y'_2 = -y_1 \frac{x'_2}{x'_1} = -\frac{y_1 R_2}{2x'_1 - R_2}$$

- se pune condiția ca cele două imagini să aibă aceeași mărime:

$$y_2 = y'_2 \Rightarrow \frac{R_1}{2x_1 - R_1} = \frac{R_2}{2x'_1 - R_2}$$

- legătura dintre  $x_1$  și  $x'_1$  este dată de distanța dintre cele două oglinzi:

$$d = x_1 - x'_1 \Rightarrow x'_1 = x_1 - d$$

de unde rezultă:

$$x_1 = \frac{R_1 d}{R_1 - R_2}$$

- se observă că poziția obiectului depinde de razele de curbură ale oglinzilor și de distanța dintre ele

- aplicație numerică:

$$x_1 = \frac{20 \cdot 60}{20 - (-25)} = 26,67 \text{ cm}$$

### **Problema nr. 5.**

Un obiect având înălțimea de  $2 \text{ cm}$  se află situat la  $25 \text{ cm}$  în fața unei oglinzi sferice concave având raza de curbură de  $15 \text{ cm}$ . Caracterizați imaginea obținută. Arătați cum se modifică dimensiunea imaginii dacă obiectul se îndepărtează de oglindă cu  $5 \text{ cm}$ . Dar dacă se apropie de aceasta cu  $10 \text{ cm}$  ?

### **Rezolvare**

- se poate determina poziția imaginii:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R} \Rightarrow x_2 = \frac{R x_1}{2x_1 - R} = \frac{(-15) \cdot (-25)}{2 \cdot (-25) - (-15)} = -10,71 \text{ cm} (< 0)$$

deci imaginea se formează în fața oglinzii; ea este reală

- se determină mărimea obiectului:

$$\beta = -\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = -y_1 \frac{x_2}{x_1} = -2 \cdot \frac{3}{7} = -0,86 \text{ cm} (< 0)$$

deci imaginea este răsturnată; ea este reală

- dacă obiectul se îndepărtează de oglindă cu  $5\text{ cm}$ , noua sa poziție va fi:

$$x'_1 = x_1 + \Delta x_1 = -25 - 5 = -30\text{ cm}$$

- poziția noii imagini va fi:

$$\frac{1}{x'_2} + \frac{1}{x'_1} = \frac{2}{R} \Rightarrow x'_2 = \frac{Rx'_1}{2x'_1 - R} = \frac{(-15) \cdot (-30)}{2 \cdot (-30) - (-15)} = -10\text{ cm} (< 0)$$

- îndepărtând obiectul de oglindă, imaginea (reală) se apropie de aceasta

- mărimea imaginii:

$$y'_2 = -y_1 \frac{x'_2}{x'_1} = -2 \frac{-10}{-30} = -0,66\text{ cm} (< 0)$$

- imaginea rămâne răsturnată, deci reală, dar scade ca mărime

- dacă obiectul se apropie de oglindă, poziția sa va fi caracterizată de:

$$x''_1 = x_1 + \Delta x'_1 = -25 + 10 = -15\text{ cm}$$

- poziția imaginii devine:

$$x''_2 = \frac{Rx''_1}{2x''_1 - R} = \frac{(-15) \cdot (-15)}{2 \cdot (-15) - (-15)} = -15\text{ cm} (< 0)$$

- imaginea rămâne în continuare reală, dar se îndepărtează de oglindă

- se observă că în noua sa poziție, obiectul se află chiar în centrul oglinzii (se mai spune că se află la dublul distanței focale), caz în care imaginea se formează în același loc (deci tot la dublul distanței focale față de oglindă)

- ne așteptăm ca imaginea să aibă aceeași mărime cu obiectul:

$$y''_2 = -y_1 \frac{x''_2}{x''_1} = -2 \frac{-15}{-15} = -2\text{ cm} (< 0)$$

- situațiile discutate sunt prezentate în figura de mai jos:





## CAPITOLUL 3. DIOPTRUL PLAN

Se numește *dioptru* un sistem alcătuit din două medii transparente omogene. În funcție de forma suprafeței de separație, se poate vorbi despre:

- dioptru plan, atunci când suprafața de separație este plană
- dioptru sferic, când suprafața de separație este sferică

### 3.1. Noțiunea de dioptru plan

Se numește *dioptru plan* un sistem alcătuit din două medii transparente omogene, între care există o suprafață de separare plană.

Fie o rază de lumină incidentă pe o asemenea suprafață, ce separă două medii având indici de refracție diferiți,  $n_1 \neq n_2$  (figura 3.1).

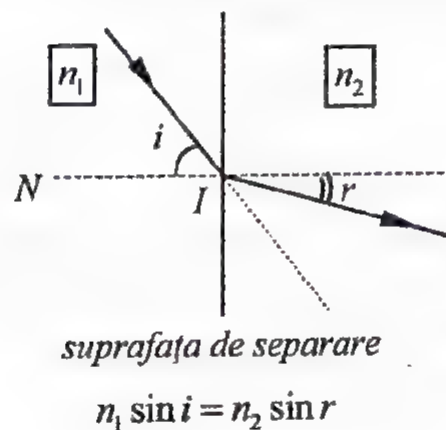


Figura 3.1. Refracția luminii prin dioptrul plan

Se întâlnesc următoarele situații:

a)  $n_2 > n_1$

Mediul din care vine raza este mai puțin refringent decât al doilea mediu ( $i \in (0^\circ, 90^\circ)$ ); se poate scrie:

$$n_2 > n_1 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} < 1$$

Folosind legea a doua a refracției, raportul  $\frac{n_1}{n_2}$  se scrie:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin r}{\sin i} < 1$$

de unde rezultă:

$$\sin r < \sin i \quad i \in (0^\circ, 90^\circ) \Leftrightarrow r < i$$

deci în al doilea mediu, raza de lumină se apropie de normală.

### Observații

1. Dacă  $i = 0^\circ$ , raza incidentă vine de-a lungul normalei  $NI$  și se spune că *incidența este normală*. Conform legii a doua a refracției, unghiul de refracție va fi nul,  $r = 0^\circ$ , iar razele incidentă și refractată vor fi în prelungire

2. Dacă  $i = 90^\circ$ , incidența este *razantă*, iar legea a doua a refracției se scrie:

$$n_1 \underbrace{\sin 90^\circ}_{=1} = n_2 \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow r = \arcsin \frac{n_1}{n_2} = \arcsin \frac{1}{n_{21}} = l (= r_{\max})$$

și astfel, toate razele care vin sub diferite unghiuri de incidență din mediul mai puțin refringent, se află după refracție în interiorul unui con de revoluție cu deschiderea  $2l$ .

Unghiul  $l$  poartă numele de *unghi limită*.

### b) $n_2 < n_1$

Mediul din care vine raza este mai refringent decât al doilea mediu ( $i \in (0^\circ, 90^\circ)$ ) și, folosind legea a doua a refracției, se poate scrie:

$$n_2 < n_1 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} > 1 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin r}{\sin i} > 1 \Rightarrow \sin r > \sin i \quad i \in (0^\circ, 90^\circ) \Leftrightarrow r > i$$

deci raza emergentă se depărtează de normală (figura 3.2, razele 1, 2 și 3).



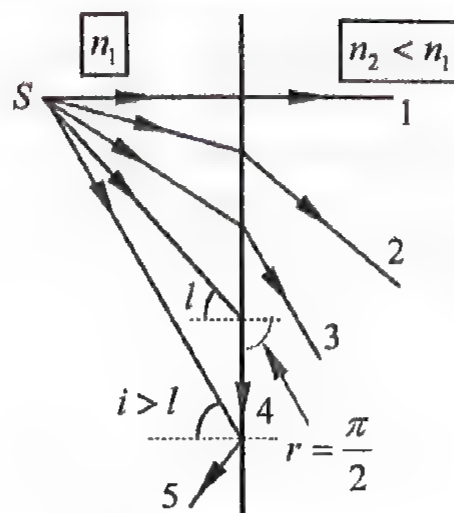


Figura 3.2. Reflexia totală

#### Observație:

Lumina trece dintr-un mediu optic mai dens într-unul mai puțin dens, deci unghiul de refracție este mai mare decât cel de incidență; valoarea sa maximă este  $r_{max} = 90^\circ$ , ceea ce înseamnă că există un unghi de incidență maxim, corespunzător,  $i_{max} = l$  (figura 3.2, raza 4).

$$n_1 \sin l = n_2 \sin 90^\circ \Rightarrow \sin l = \frac{n_2}{n_1} (< 1)$$

Dacă unghiul de incidență este mai mare decât unghiul limită ( $i > l$ , figura 3.2, raza 5), lui îi va corespunde un unghi de refracție  $r'$  și se poate scrie:

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1} \sin r' > \sin l = \frac{n_2}{n_1} \sin 90^\circ \Rightarrow r' > 90^\circ$$

Rezultă că, dacă unghiul de incidență este mai mare decât unghiul limită, raza incidentă nu mai trece în mediul al doilea, ci se *reflectă total*.

### 3.2. Formarea imaginilor în dioptrul plan

În cele ce urmează, se va studia formarea imaginilor în dioptrul plan, în condițiile unor fasciculele incidente largi.

### 3.2.1. Imaginea sagitală

Fie o sursă luminoasă punctiformă  $S_1$ . Toate razele care pornesc din  $S_1$  și cad pe suprafața dioptrului sub același unghi de incidență  $i$ , după refracție trec prin  $S_2$  ( imaginea sagitală a lui  $S_1$ , figura 3.3).

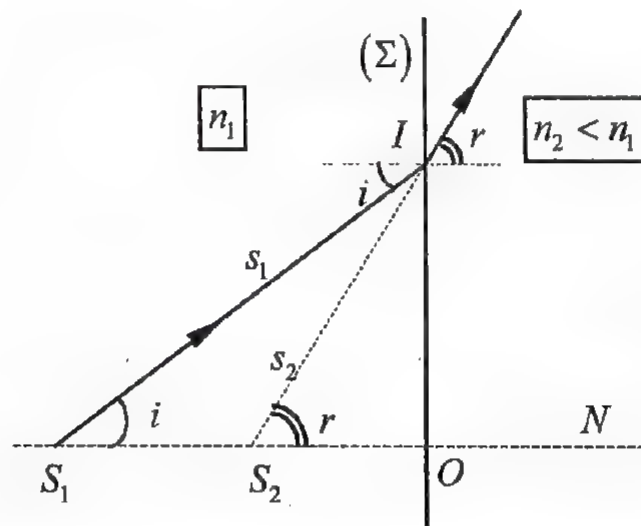


Figura 3.3. Formarea imaginii sagitale în dioptrul plan

Dacă unghiul de incidență se modifică, imaginea  $S_2$  se va forma în alt loc, dar rămâne pe normala  $S_1N$  (vezi figura 3.4).

Din triunghiurile  $\Delta S_1IO$  și  $\Delta S_2IO$  rezultă:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta S_1IO: IO = S_1O \cdot \operatorname{tg} i \\ \Delta S_2IO: IO = S_2O \cdot \operatorname{tg} r \end{array} \right\} \Rightarrow S_1O \cdot \operatorname{tg} i = S_2O \cdot \operatorname{tg} r \Rightarrow S_2O = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} S_1O$$

Pentru ca imaginea  $S_2$  să rămână fixă când variază incidența, trebuie ca  $S_2O$  să fie constant.

Dar, conform legii refracției, este constant numai raportul sinusurilor, raportul tangentelor fiind variabil; prin urmare, în general, poziția lui  $S_2$  se modifică.

Prezintă interes următoarele situații:

-  $S_1O = 0 \Rightarrow S_2O = 0, (\forall) i$ , deci dioptrul plan este stigmatic pentru punctele de pe suprafața sa

-  $S_1O = \infty \Rightarrow S_2O = \infty$ ,  $(\forall) i$ , deci dioptrul plan este stigmatic pentru punctele de la infinit

Se poate vorbi astfel despre stigmatism aproximativ pentru unghiuri de incidență mici, când  $\sin i \approx \operatorname{tg} i$  (adică razele cad aproape perpendicular pe suprafața de separare).

Se notează:

$$IS_1 = s_1; IS_2 = s_2$$

și se poate scrie:

$$IO = s_1 \sin i = s_2 \sin r$$

Folosind legea refracției:

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1} \sin r$$

rezultă:

$$s_1 \frac{n_2}{n_1} \sin r = s_2 \sin r \Rightarrow \frac{s_1}{n_1} = \frac{s_2}{n_2}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$\frac{n_1}{s_1} - \frac{n_2}{s_2} = 0$$

adică *ecuația imaginii sagitale a dioptrului plan*.

### Observații

1. În condițiile în care raza de lumină suferă reflexie totală pe dioptru, lumina se întoarce în mediul din care a venit, ceea ce se poate scrie:

$$n_2 = -n_1$$

Această relație este echivalentă de fapt cu o condiție de reflexie, dioptrul plan comportându-se ca o oglindă plană; în acest caz, ecuația imaginii sagitale devine:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 0 \Rightarrow s_1 = -s_2$$

rezultat cunoscut de la studiul oglinzilor plane.

2. Ecuația imaginii sagitale a dioptrului plan se poate obține din ecuația imaginii sagitale a dioptrului sferic, punând condiția ca raza de



curbură a acestuia să fie infinită (condiția de obținere a unui dioptru plan).

### 3.2.2. Imaginea tangențială

Se consideră sursa punctiformă  $S$  de la care pornește raza  $SI_1$ ; conform figurii, după refracție, ea va forma imaginea virtuală  $S_1$ . Dacă unghiul de incidență se modifică (fie acesta  $i_2$ ), imaginea se va forma în alt loc,  $S_2$  (figura 3.4).

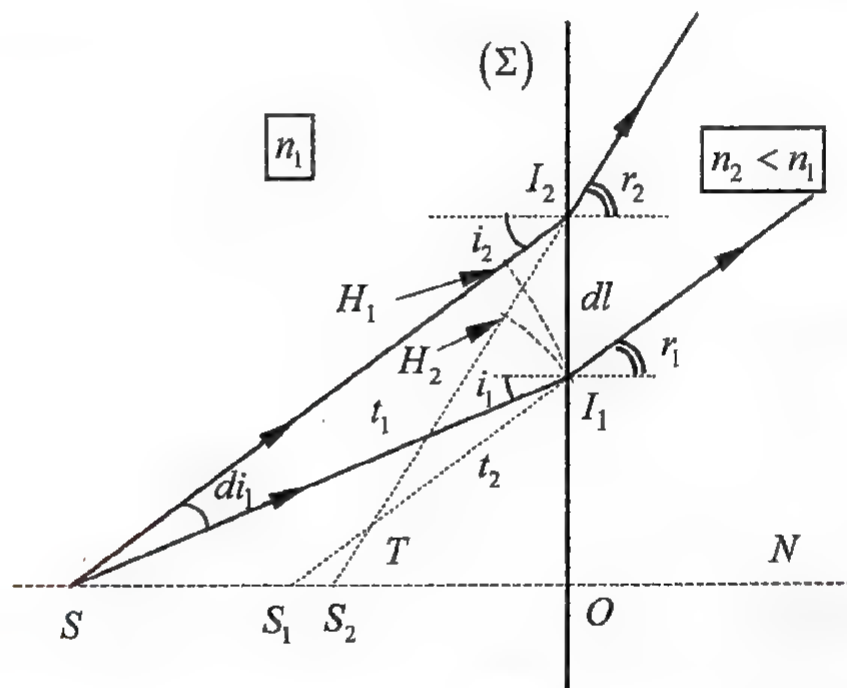


Figura 3.4. Formarea imaginii tangențiale în dioptrul plan

Imaginea tangențială se obține grupând razele după secțiuni plane care trec prin  $SO$ . Se notează cu  $T$  intersecția prelungirilor razelor  $S_1I_1$  și  $S_2I_1$  (figura 3.4) și se vor folosi notațiile:

$$SI_1 = t_1; TI_1 = t_2; I_1I_2 = dl$$

Se scrie legea refracției și apoi se va diferenția:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r_1$$

$$n_1 \cos i_1 di_1 = n_2 \cos r_1 dr_1$$

Se construiește un cerc cu centrul în  $S$  și cu raza egală cu  $SI_1$ ; acesta va intersecta  $SI_2$  în punctul  $H_1$ , obținându-se astfel triunghiul isoscel  $\triangle SI_1H_1$ , cu un unghi  $di_1$  foarte mic (figura 3.5).

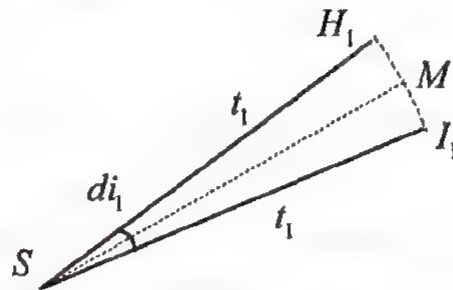


Figura 3.5. Construcție ajutătoare pentru determinarea lui  $di_1$

Se construiește înălțimea  $SM$  corespunzătoare laturii necongruente  $I_1H_1$  (punctul  $M$  se află la mijlocul acesteia) și se obține triunghiul dreptunghic  $\triangle SI_1M$  în care<sup>7</sup>:

$$\sin \frac{di_1}{2} = \frac{I_1M}{SI_1} = \frac{\frac{I_1H_1}{2}}{SI_1} \Rightarrow di_1 = \frac{I_1H_1}{t_1}$$

Lungimea segmentului  $I_1H_1$  se determină din triunghiul  $\triangle I_1I_2H_1$ , dreptunghic în  $H_1$ , în care  $\widehat{H_1I_1I_2} = i_1$ :

$$\cos i_1 = \frac{I_1H_1}{I_1I_2} \Rightarrow I_1H_1 = I_1I_2 \cos i_1 \Rightarrow I_1H_1 = dl \cos i_1$$

de unde rezultă:

$$di_1 = \frac{dl \cos i_1}{t_1}$$

Analog, se determină  $dr_1$ , construind un cerc cu centrul în punctul  $T$  și de rază  $t_2$ ; acesta va intersecta segmentul  $TI_2$  în punctul  $H_2$ . Se obține astfel triunghiul isoscel  $\triangle TI_1H_2$ , cu laturile congruente egale cu  $t_2$  și cu unghiul  $dr_1$  foarte mic (figura 3.6).

<sup>7</sup> Se ține cont de aproximația unghiurilor mici (exprimate în radiani), pentru care  $\sin i \approx i$

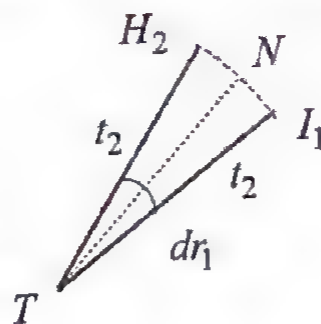


Figura 3.6. Construcție ajutătoare pentru determinarea lui  $dr_1$

Construind înălțimea  $TN$  corespunzătoare laturii necongruente  $I_1H_2$  (punctul  $N$  se află la mijlocul acesteia), se obține triunghiul dreptunghic  $\triangle TI_1N$  în care<sup>8</sup>:

$$\sin \frac{dr_1}{2} = \frac{I_1N}{TI_1} = \frac{\frac{I_1H_2}{2}}{TI_1} \Rightarrow dr_1 = \frac{I_1H_2}{t_2}$$

Lungimea segmentului  $I_1H_2$  se determină din triunghiul  $\triangle I_1I_2H_2$ , dreptunghic în  $H_2$ , în care  $\widehat{H_2I_1I_2} = r_1$ :

$$\cos r_1 = \frac{I_1H_2}{I_1I_2} \Rightarrow I_1H_2 = I_1I_2 \cos r_1 \Rightarrow I_1H_2 = dl \cos r_1$$

de unde rezultă:

$$dr_1 = \frac{dl \cos r_1}{t_2}$$

Cunoscând expresiile lui  $di_1$  și  $di_2$ , rezultă:

$$\frac{n_1 dl \cos^2 i_1}{t_1} = \frac{n_2 dl \cos^2 r_1}{t_2}$$

sau, împărțind relația de mai sus cu  $dl$ :

$$\frac{n_1 \cos^2 i_1}{t_1} - \frac{n_2 \cos^2 r_1}{t_2} = 0$$

Această relație poartă numele de *ecuația imaginii tangențiale* (pentru dioptrul plan).

<sup>8</sup> Se ține cont de aproximația unghiurilor mici (exprimate în radiani), pentru care  $\sin i \approx i$



### Observații

1. Se observă dependența  $t_2 = t_2(i_1)$ , deci dioptrul plan este un sistem astigmatic pentru fascicule largi

2. Dacă se pune condiția de reflexie,  $n_2 = -n_1$ , ecuația imaginii tangențiale devine:

$$\frac{\cos^2 i_1}{t_1} + \frac{\cos^2 r_1}{t_2} = 0$$

Fiind însă vorba de reflexie, între unghiurile  $i_1$  și  $r_1$  va exista relația:

$$i_1 = -r_1$$

ceea ce înseamnă că se mai poate scrie:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 0 \Rightarrow t_1 = -t_2$$

rezultat caracteristic oglinzilor plane.

3. Pentru raze cvasinormale ( $i_1$  foarte mic), se aproximează  $s_1$  și  $t_1$  cu  $p_1$ , respectiv  $s_2$  și  $t_2$  cu  $p_2$  și se obține:

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = 0$$

relație cunoscută sub numele de *ecuația dioptrului plan în aproximația Gauss*.

### 3.2.3. Construcția grafică a razei refractate

Direcția razei refractate în cazul unui dioptru plan poate fi determinată pe cale grafică astfel (figura 3.7):

- se desenează suprafața ( $\Sigma$ ) de separare dintre cele două medii (având indicele de refracție  $n_1$ , respectiv  $n_2$ )

- se trasează raza incidentă  $SI$  (în punctul de incidență  $I$ )

- se alege în planul figurii un punct  $O$  și se construiesc cu centrul în acesta două cercuri cu raze proporționale cu  $n_1$ , respectiv  $n_2$

$$R_1 = \alpha n_1, R_2 = \alpha n_2$$

unde  $\alpha$  este coeficientul de proporționalitate

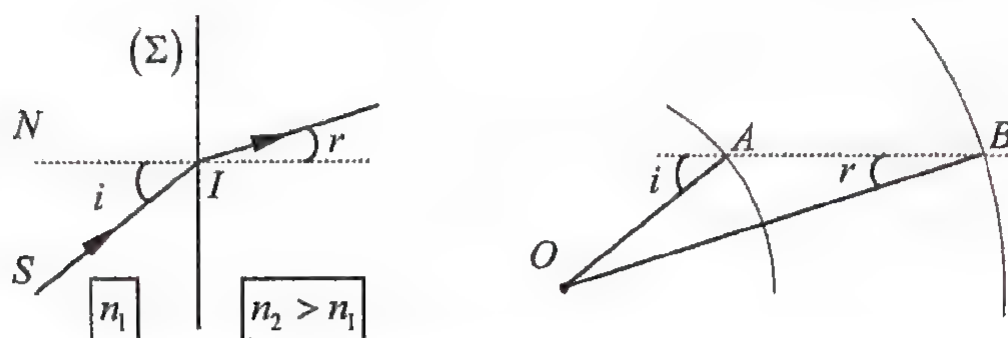


Figura 3.7. Construcția razei refractate cu ajutorul principiului Huygens

- din punctul  $O$  se trasează o paralelă la raza  $SI$ ; aceasta întâlnește primul cerc în  $A$
- din punctul  $A$  se trasează o paralelă la normala în punctul de incidență, care taie al doilea cerc în  $B$
- se unește punctul  $O$  cu  $B$  și se obține direcția razei refractate

Se scrie teorema sinusului în triunghiul  $OAB$ ; se obține:

$$\frac{OA}{\sin r} = \frac{OB}{\sin(\pi - i)} = \frac{AB}{\sin(i - r)}$$

Se reține din această relația doar prima egalitate și se ține cont de faptul că razele  $OA$  și  $OB$  ale celor două cercuri sunt, prin construcție, proporționale cu indicii de refracție ai celor două medii. Rezultă:

$$\frac{\alpha n_1}{\sin r} = \frac{\alpha n_2}{\sin i} \Rightarrow \frac{n_1}{\sin r} = \frac{n_2}{\sin i}$$

adică legea refracției.

### 3.3. Asociații de dioptri plani

În cele ce urmează, vor fi discutate lama cu fețe plan-paralele și prisma optică ca asociații simple de doi dioptri plani.

În ambele situații se consideră că acestea sunt mărginite de același mediu (aerul sau un mediu optic transparent, având indicele de refracție  $n_1$ ).

### 3.3.1. Lama cu fețe plan-paralele

Lama cu fețe plan-paralele este o asociație de doi dioptri plani paraleli, cuprinzând un mediu de indice de refracție  $n$ , mediile exterioare fiind identice.

#### Mersul razelor de lumină

Atunci când o rază de lumină monocromatică traversează o lamă cu fețe plan-paralele, ea își păstrează direcția inițială, dar apare o deplasare laterală (figura 3.8):

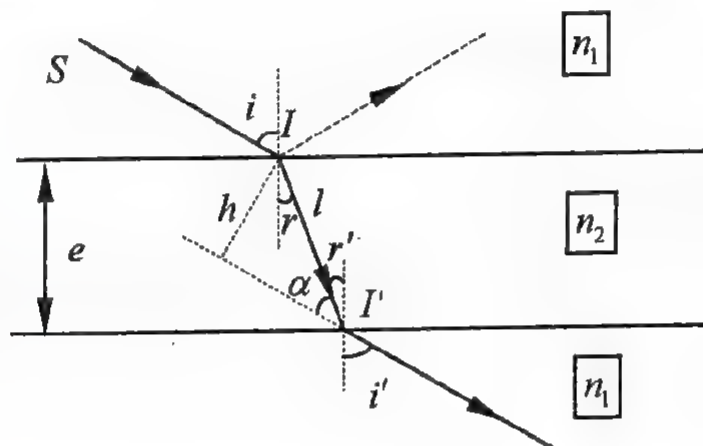


Figura 3.8. Mersul razelor de lumină prin lama cu fețe plan-paralele

Scriind legea refracției pentru cele două refracții succesive, pe cele două fețe ale lamei:

$$\left. \begin{array}{l} n_1 \sin i = n_2 \sin r \\ n_2 \sin r' = n_1 \sin i' \\ r' = r \text{ (alterne interne)} \end{array} \right\} \Rightarrow i = i'$$

adică raza emergentă este paralelă cu raza incidentă.

#### Deplasarea razei incidente

Raza emergentă este deplasată, deplasarea fiind  $h$  (figura 3.8):

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \sin \alpha \\ \alpha = i - r \end{array} \right\} \Rightarrow h = l \sin(i - r)$$

Din triunghiul  $\Delta IMI'$  rezultă:



$$\cos r = \frac{e}{l} \Rightarrow l = \frac{e}{\cos r}$$

și se obține:

$$h = \frac{e \sin(i-r)}{\cos r} = h(e, i)$$

Deplasarea crește odată cu creșterea grosimii lamei și a unghiului de incidență. Pentru unghiuri mici:

$$h = \frac{e(i-r)}{1} \cong ei \left(1 - \frac{r}{i}\right) \cong ei \left(1 - \frac{r}{nr}\right) = ei \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

deci deplasarea este dependentă de grosimea lamei, unghiul de incidență și indicele de refracție al materialului din care este confecționată lama.

### Grosimea aparentă

Imaginea unui punct real dat de o lamă este virtuală. Dacă lama are indicele de refracție mai mare decât cel al mediilor alăturate, imaginea este mai aproape de lamă (figurile 3.9 a și 3.9 b).

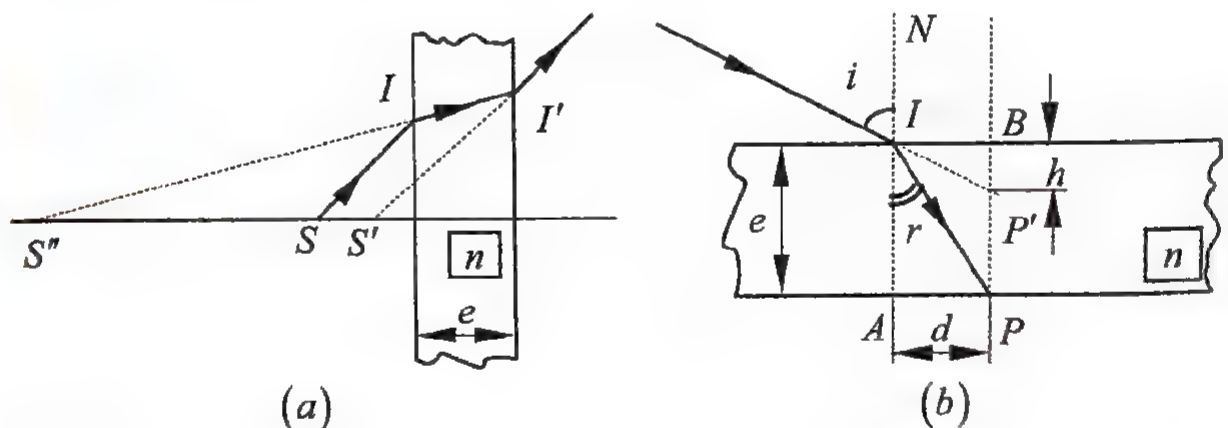


Figura 3.9. Determinarea grosimii aparente a unei lame cu fețe plan-paralele

Folosind notațiile din figura 3.9 b, în triunghiul  $\triangle IAP$  se poate scrie:

$$\operatorname{tgr} = \frac{AP}{IA} = \frac{d}{e} \Rightarrow d = e \operatorname{tgr}$$

De asemenea, în triunghiul  $\triangle IBP'$ :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-i\right)=\frac{BP'}{IB}=\frac{h}{d} \Rightarrow h=d \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-i\right)=\frac{d}{\operatorname{tgi}}=e \frac{\operatorname{tgr}}{\operatorname{tgi}}=e \frac{\sin r}{\sin i} \cdot \frac{\cos i}{\cos r}$$

Se poate folosi legea refracției:

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1}{n}$$

și astfel expresia lui  $h$  devine:

$$h=e \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{e}{n} \cdot \frac{n \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{e \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

Dacă observatorul privește pe direcția normalei:

$$i=0 \Rightarrow \cos i=1 \Rightarrow h=\frac{e}{n}$$

Rezultă astfel că punctul  $P$ , situat pe fața inferioară a lamei, va fi perceput mai aproape de suprafața superioară a lamei decât este în realitate; imaginea punctului  $P$  este virtuală și mai aproape de lamă.

### Modificarea drumului optic

Dacă se introduce în drumul unui fascicul paralel o lamă dintr-un material de indice de refracție  $n$ , drumul optic crește cu  $\delta$  (figura 3.10).

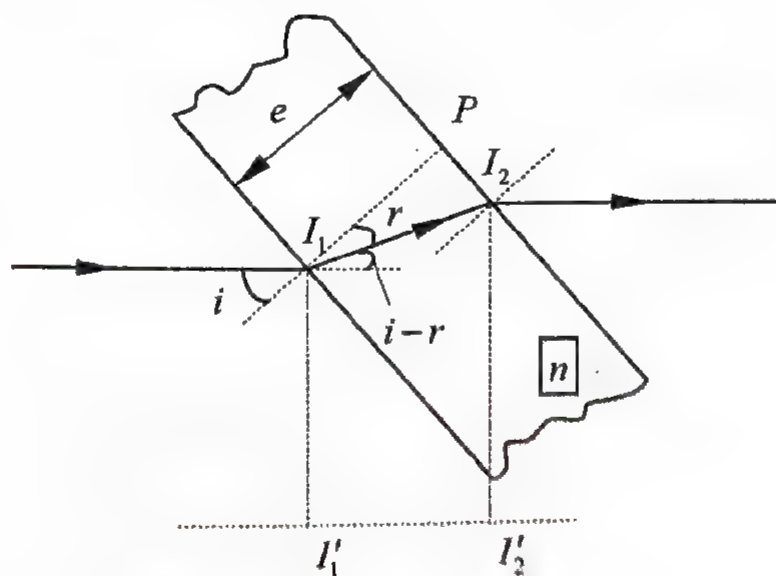


Figura 3.10. Modificarea drumului optic prin lama cu fețe plan-paralele

Conform figurii 3.10, se poate scrie:

$$\delta = nI_1I_2 - I'_1I'_2$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(i-r) &= \frac{I'_1I'_2}{I_1I_2} \Rightarrow I'_1I'_2 = I_1I_2 \cos(i-r) \\ \cos r &= \frac{I_1P}{I_1I_2} \Rightarrow I_1I_2 = \frac{I_1P}{\cos r} = \frac{e}{\cos r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I'_1I'_2 = \frac{e}{\cos r} \cos(i-r)$$

de unde rezultă:

$$\delta = n \frac{e}{\cos r} - \frac{e}{\cos r} \cos(i-r) = \frac{e}{\cos r} [n - \cos(i-r)]$$

Se observă că la incidență normală diferența de drum devine:

$$i = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow \delta = e(n-1)$$

### 3.3.2. Prisma optică

Prisma optică este un mediu transparent mărginit de doi dioptri plani care se intersectează după o dreaptă numită *muchia prisme*.

Elementele prisme sunt (figura 3.11):

- muchia prisme: linia de intersecție a celor două fețe plane ale prisme
- unghiul prisme (unghiul de refringență): unghiul diedru dintre cele două fețe plane
- secțiunea principală: orice secțiune perpendiculară pe muchie

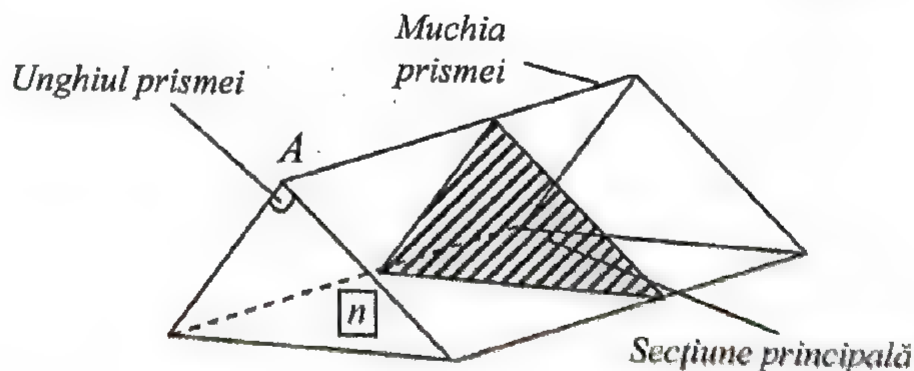


Figura 3.11. Elementele prisme optice

#### Formulele prisme optice

Întâlnind fața  $AB$  a prisme, raza de lumină suferă o refracție în punctul de incidență  $I_1$  (figura 3.12).



Conform legii refracției:

$$\sin i_1 = n \sin r_1$$

Întâlnind fața  $AC$  a prisme, raza de lumină suferă o a doua refracție în punctul de emergență  $I_2$ , îndepărtându-se de normală după legea:

$$\sin i_2 = n \sin r_2$$

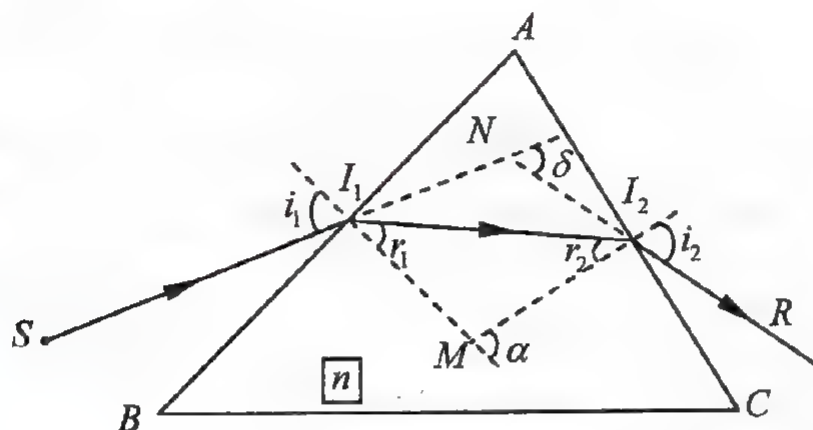


Figura 3.12. Mersul razelor de lumină prin prisma optică

Rezultă că se poate calcula indicele de refracție al prisme:

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{\sin i_2}{\sin r_2}$$

Unghiul dintre direcția  $SI_1$  a razei incidente și direcția  $I_2R$  a razei emergente se numește *unghi de deviație*,  $\delta$ .

Unghiul  $\alpha$  este exterior triunghiului  $\Delta I_1I_2M$ :

$$\alpha = r_1 + r_2 = (90^\circ - \widehat{AI_1I_2}) + (90^\circ - \widehat{AI_2I_1}) = 180^\circ - (\widehat{AI_1I_2} - \widehat{AI_2I_1})$$

$$\alpha = 180^\circ - (180^\circ - A) = A$$

Cu această observație se poate scrie:

$$A = r_1 + r_2$$

respectiv pentru unghiul de deviație:

$$\delta = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2) = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2) = i_1 + i_2 - A$$

### Deviația minimă

Se consideră unghiul de deviație ca funcție de  $i_1$ :

$$\delta = \delta(i_1)$$

Se diferențiază formulele prisme:

$$\cos i_1 di_1 = n \cos r_1 dr_1 \Rightarrow di_1 = n \frac{\cos r_1}{\cos i_1} dr_1$$

$$\cos i_2 di_2 = n \cos r_2 dr_2 \Rightarrow di_2 = n \frac{\cos r_2}{\cos i_2} dr_2$$

$$dA = dr_1 + dr_2 = 0 \Rightarrow dr_1 = -dr_2 \Rightarrow \frac{dr_1}{dr_2} = -1$$

$$d\delta = di_1 + di_2$$

Se împarte ultima relație cu  $di_1$  și se obține:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1} = 1 + \frac{\cos r_2 \cdot \cos i_1}{\cos i_2 \cdot \cos r_1} \cdot \frac{dr_2}{dr_1} = 1 - \frac{\cos r_2 \cdot \cos i_1}{\cos i_2 \cdot \cos r_1}$$

Dacă este îndeplinită condiția

$$\frac{d\delta}{di_1} = 0$$

deviația trece printr-un extrem<sup>9</sup>.

$$\frac{\cos r_2 \cdot \cos i_1}{\cos r_1 \cdot \cos i_2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} i_1 = i_2 = i \\ r_1 = r_2 = r \end{cases}$$

$$d_{\min} = 2i - 2r = 2(i - r)$$

Când deviația este minimă, raza traversează proba simetric față de bisectoarea unghiului prisme,  $A$ .

Cu cât unghiul  $A$  al prisme este mai mare, pentru același unghi de incidență, deviația  $\delta$  este și ea mai mare.

Se observă că folosind unghiul de deviație minimă se poate determina indicele de refracție al prisme:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_m = 2i - 2r \\ \sin i = n \sin r \end{array} \right\} \Rightarrow n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\delta_m + 2r}{2}}{\sin \frac{2r}{2}} \stackrel{2r=A}{=} \frac{\sin \frac{\delta_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

<sup>9</sup> Studiind derivata a doua în raport cu  $i_1$  a funcției  $\delta = \delta(i_1)$ , se poate arăta că acest extrem este un minim.

### Condiția de emergență

Dintre toate razele incidente pe o prismă, numai o parte reușesc să o traverseze - acelea pentru care este îndeplinită condiția de emergență:

$$r_2 \leq l$$

Dacă incidența este razantă,  $i_1 = 90^\circ$ , unghiul de refracție  $r_1$  are cea mai mare valoare posibilă,  $l$ . Unghiul  $r_2$  sub care cade raza pe a doua față a prisme este egal cu:

$$r_2 = A - r_1 = A - l$$

Pentru ca cel puțin o rază să poată ieși din prismă, trebuie ca  $r_2 \leq l$ , ceea ce duce la:

$$r_2 = A - l \leq l \Rightarrow A \leq 2l$$

Razele pentru care  $r_2 > l$  se vor reflecta total.

În concluzie, dacă prisma are unghiul  $A \leq 2l$ , atunci toate razele incidente vor părăsi prisma pe fața  $AC$ , oricare ar fi unghiul de incidență. Dacă unghiul prisme nu îndeplinește condiția de emergență, deci  $A > 2l$ , toate razele intrate în prismă se vor reflecta total pe fața  $AC$ .

### Observație

Dacă fețele prisme fac un unghi mic ( $A < 5^\circ$ ), iar incidența este, la rândul său, mică, se poate înlocui valoarea funcției sinus cu unghiul exprimat în radiani, obținând:

$$i_1 = nr_1$$

$$i_2 = nr_2$$

$$A = r_1 + r_2$$

$$\delta = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2) = n(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2) = (n-1)(r_1 + r_2) = (n-1)A$$

Rezultă că deviația este practic independentă de unghiul de incidență, atunci când acesta este mic. Ea este proporțională cu:

- unghiul  $A$  al prisme

- indicele de refracție  $n$  al materialului din care este confecționată prisma

Fie o prismă a cărei secțiune principală este un triunghi dreptunghic isoscel (figura 3.13). Dacă pe fața  $AB$  cade o rază de lumină monocromatică, ea intră în prismă nedeviată și ajunge pe fața  $AC$  sub un unghi de  $45^\circ$ . Dacă acesta este mai mare decât unghiul



limită, raza de lumină se va reflecta total, căzând perpendicular pe fața  $BC$ , pe care o va părăsi nedeviată.

O astfel de prismă se va numi *prismă cu reflexie totală* și ea deviază raza incidentă cu  $90^\circ$ .

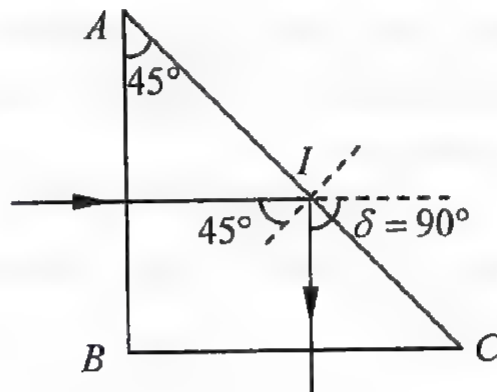


Figura 3.13. Prismă cu reflexie totală și unghi de deviație de  $90^\circ$

Dacă raza de lumină cade normal pe ipotenuza  $AC$ , ea este deviată cu  $180^\circ$  (figura 3.14).

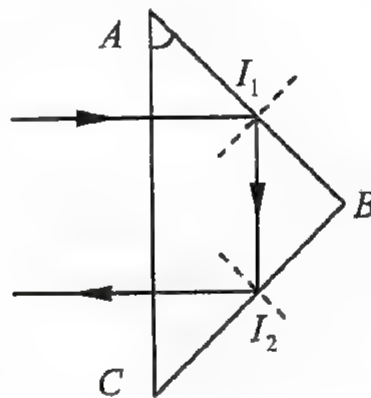


Figura 3.14. Prismă cu reflexie totală și unghi de deviație de  $180^\circ$

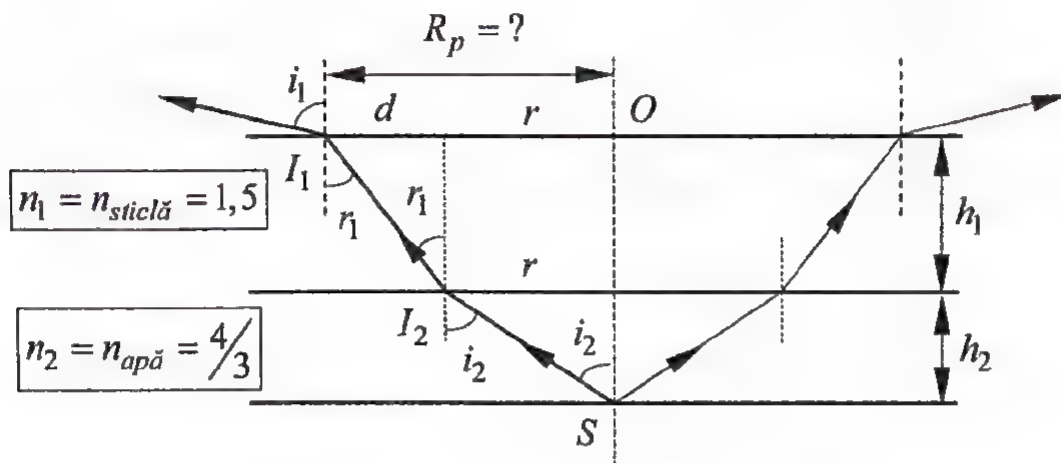
### 3.4. Aplicații

#### Problema nr. 1.

O platformă de sticlă acoperă un bazin în care se află apă, intrând în contact cu apa. Pe fundul bazinului se află o sursă punctiformă de lumină, iar pe platformă se află un observator. Stabiliți dacă este posibil ca acesta să nu observe sursa de pe fundul bazinului.

- pentru a nu vedea sursa de lumină, observatorul trebuie să se afle pe platformă la o distanță  $R_p$  de verticala corespunzătoare sursei:

$$R_p = d + r$$



- la refracția aer-sticlă, legea a doua a refracției se scrie:

$$n_{aer} \sin i_1 = n_1 \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{1}{n_1} \sin i_1$$

- pentru ca raza de lumină ce provine de la sursă să nu intre în ochiul observatorului, trebuie ca unghiul  $i_1$  să fie de  $90^\circ$ ; relația de mai sus devine:

$$\sin r_1 = \frac{1}{n_1} \sin 90^\circ = \frac{1}{n_1}$$

- din geometria problemei rezultă:

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{d}{h_1} \Rightarrow d = h_1 \frac{\sin r_1}{\cos r_1} = h_1 \frac{\sin r_1}{\sqrt{1 - \sin^2 r_1}} = \frac{h_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}}$$

- la refracția sticlă-apă:

$$n_{sticlă} \sin r_1 = n_{apă} \sin i_2 \Rightarrow \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin r_1 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2}$$

respectiv:

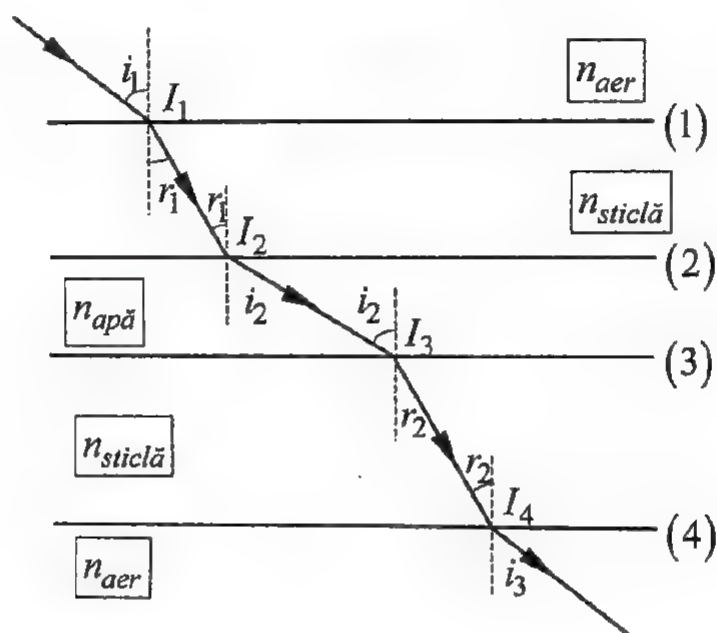
$$\operatorname{tg} i_2 = \frac{r}{h_2} \Rightarrow r = h_2 \frac{\sin i_2}{\cos i_2} = \frac{h_2}{\sqrt{n_2^2 - 1}}$$

- prin urmare, distanța  $R_p$  căutată este:

$$R_P = \frac{h_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} + \frac{h_2}{\sqrt{n_2^2 - 1}}$$

### Problema nr. 2.

Un bloc de sticlă prezintă o incluziune de formă paralelipipedică, de apă. Presupunând că blocul este situat în aer, să se stabilească dacă raza emergentă este paralelă cu cea incidentă, considerând că ea traversează incluziunea.



### Rezolvare

- se aplică legea a II-a a refracției la suprafețele de separare pe care le întâlnește raza de lumină
- pentru suprafața aer-sticlă (1):

$$n_{aer} \sin i_1 = n_{sticlă} \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{n_{aer}}{n_{sticlă}} \sin i_1$$

- pentru suprafața sticlă-apă (2):

$$n_{sticlă} \sin r_1 = n_{apă} \sin i_2$$

$$\sin i_2 = \frac{n_{sticlă}}{n_{apă}} \sin r_1 = \frac{n_{sticlă}}{n_{apă}} \cdot \frac{n_{aer}}{n_{sticlă}} \sin i_1 = \frac{n_{aer}}{n_{apă}} \sin i_1$$

- situația este similară celei în care raza de lumină trece din aer direct în apă
- pentru suprafața apă-sticlă (3):



$$n_{apă} \sin i_2 = n_{sticlă} \sin r_2 \Rightarrow \sin r_2 = \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}} \sin i_2$$

$$\sin r_2 = \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}} \cdot \frac{n_{aer}}{n_{apă}} \sin i_1 = \frac{n_{aer}}{n_{sticlă}} \sin i_1$$

- lucrurile stau ca și când raza de lumină ar trece direct din aer în sticlă, iar celelalte medii nu ar exista (ele trebuie luate în considerare dacă se studiază devierea produsă de mediile străbătute de raza de lumină)
- pentru suprafața sticlă-aer (4):

$$n_{sticlă} \sin r_2 = n_{aer} \sin i_3$$

$$\sin i_3 = \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \sin r_2 = \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \cdot \frac{n_{aer}}{n_{sticlă}} \sin i_1 = \sin i_1$$

$$\sin i_3 = \sin i_1 \Rightarrow i_3 = i_1$$

deci razele incidentă și emergentă sunt paralele

### Observație

- dacă trecerea sticlă-apă se produce la limită totală ( $n_{apă} < n_{sticlă}$ ):

$$n_{sticlă} \sin r_{sticlă} = n_{apă} \sin 90^\circ \Rightarrow \sin r_{sticlă} = \sin l_{sticlă-apă} = \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}}$$

- aceasta ar însemna un unghi de incidență  $i_1'$  egal cu:

$$\sin i_1' = \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \sin r_{sticlă} = \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \cdot \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}} = \frac{n_{apă}}{n_{aer}} > 1$$

respectiv, pentru reflexie totală:

$$r_1 > l_{sticlă-apă} \Rightarrow \sin r_1 > \sin l_{sticlă-apă}$$

$$n_{sticlă} \sin r_1 > n_{sticlă} \sin l_{sticlă-apă} \Rightarrow n_{aer} \sin i_1 > n_{sticlă} \sin l_{sticlă-apă}$$

$$\sin i_1 > \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \sin l_{sticlă-apă} \Rightarrow \sin i_1 > \frac{n_{sticlă}}{n_{aer}} \cdot \frac{n_{apă}}{n_{sticlă}} = \frac{n_{apă}}{n_{aer}} > 1$$

ceea ce nu se poate; prin urmare, pentru orice unghi de incidență, va exista emergență, indiferent de indicii de refracție considerați ( $n_{apă} > n_{aer}$ )



$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{AI_1I_2}) = 90^\circ \\ m(\widehat{I_1AI_2}) = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\widehat{AI_2I_1}) = 30^\circ \Rightarrow r_2 = 60^\circ$$

- se poate încerca o aplicare a celei de a doua legi a refracției în punctul  $I_2$ , ceea ce va duce la următoarea situație (s-a notat cu  $i_2$  unghiul de emergență de pe fața  $AC$ ):

$$n \sin 60^\circ = \sin i_2 \Rightarrow \sin i_2 = 1,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,3 > 1$$

rezultat inacceptabil din punct de vedere matematic, ceea ce înseamnă că lumina nu poate părăsi prisma pe fața considerată !

- prin urmare, avem de-a face cu o reflexie totală: raza de lumină ar urma să intre într-un mediu mai puțin dens, ceea ce recomandă calculul unghiului limită:

$$1,5 \cdot \sin l = 1 \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow \sin l = \frac{1}{1,5} \Rightarrow l = 41,81^\circ \approx 42^\circ < r_2 = 60^\circ$$

- se observă că, într-adevăr, incidența pe fața  $AC$  are loc sub un unghi mai mare decât unghiul limită, deci apare reflexia totală; raza se reflectă în  $I_2$  și cade pe fața  $BC$  în punctul  $I_3$

- în triunghiul  $\Delta CI_3I_2$ :

$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{CI_2I_3}) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \\ m(\widehat{I_3CI_2}) = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\widehat{I_2I_3C}) = 90^\circ \Rightarrow r_3 = 0^\circ$$

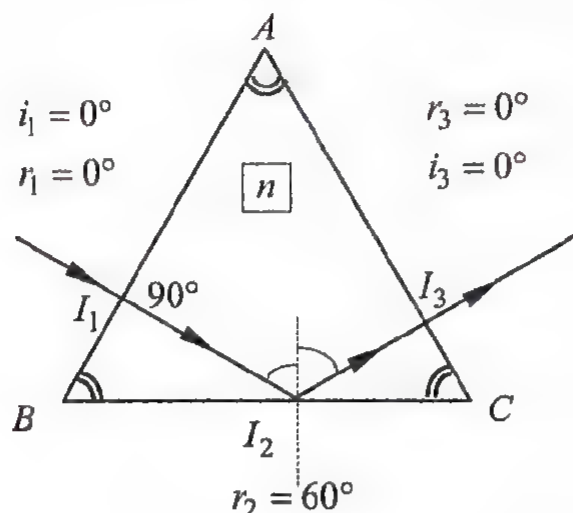
- cu alte cuvinte, din geometria problemei rezultă că incidența pe fața  $BC$  a prisme este normală, ceea ce înseamnă că raza de lumină va trece în al doilea mediu nedeviată (perpendicular pe fața  $BC$ ):

$$i_3 = 0^\circ$$

- dacă a doua față pe care s-ar realiza incidența este  $BC$ , situația ar fi similară cu cea descrisă mai sus

- va apărea o reflexie totală pe fața  $BC$ , urmată de o incidență normală pe fața  $AC$ , în punctul  $I_3$ , deci raza de lumină va părăsi prisma perpendicular pe aceasta





### Observație

- deoarece incidența pe prima față a prisme este normală:

$$i_1 = 0^\circ \Rightarrow r_1 = 0^\circ$$

- știind că  $r_1 + r_2 = A$ , rezultă că  $r_2 = A = 60^\circ$ , deci incidența pe a doua față va avea loc sub un unghi mai mare decât unghiul critic, deci va apărea reflexia totală, raza de lumină ieșind din prismă pe cea de a treia față a acesteia, perpendicular pe aceasta, așa cum s-a arătat

### Problema nr. 4.

O rază de lumină este incidentă sub un unghi de  $60^\circ$  pe o prismă având indicele de refracție  $n = 1,5$  și unghiul refringent  $A = 60^\circ$ . Să se determine unghiul de emergență, știind că prisma este situată în aer. Care ar trebui să fie indicele de refracție al mediului din dreapta, pentru ca emergența pe a doua față a prisme să se producă la limită ?

### Rezolvare

- pentru refracția pe prima față a prisme se poate scrie:

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sin 60^\circ}{1,5} = 0,577 \Rightarrow r_1 \approx 35^\circ$$

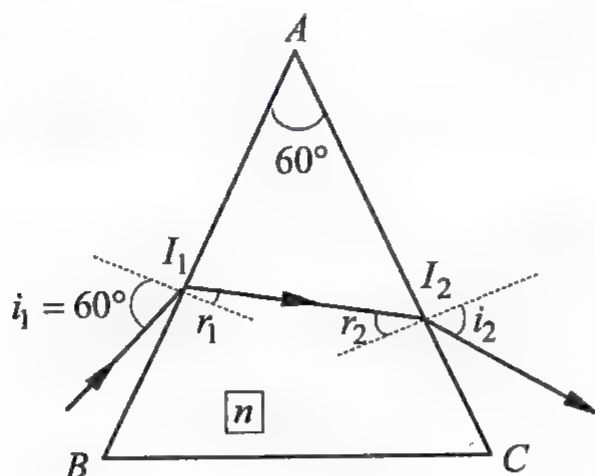
- deoarece  $r_1 + r_2 = A$ , rezultă:

$$r_2 = 60^\circ - 35^\circ = 25^\circ$$

- presupunând că fața  $AC$  separă mediul cu indicele de refracție  $n$  (mediul prisme) de cel cu indicele de refracție  $n'$  (mediul de emergență), se poate scrie:

$$n \sin r_2 = n' \sin 90^\circ \Rightarrow n' = n \sin r_2 \approx 0,63 < 1$$

ceea ce nu este posibil

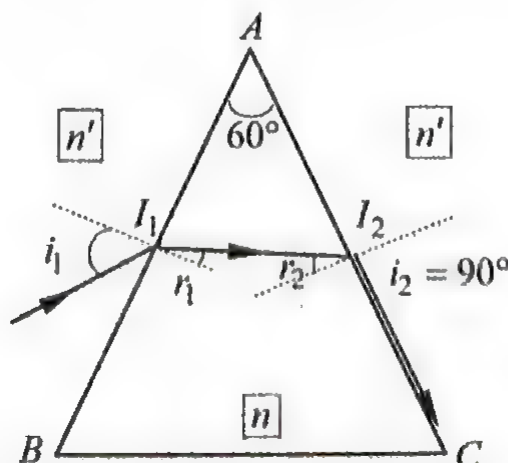


- rezultă astfel că în cazul prisme date, la un unghi incidență de  $60^\circ$ , nu poate apărea refracția la limită pe a doua față a prisme, indiferent de tipul mediului de emergență

### Problema nr. 5.

O prismă de sticlă ( $n = 1,5$ ) este scufundată într-un bazin cu apă ( $n_{apă} = \frac{4}{3}$ ), în care se află o sursă punctiformă de lumină. Arătați în ce condiții trebuie să se realizeze incidența, pentru ca emergența pe a doua față a prisme să nu poată avea loc, cunoscând că valoarea unghiului refringent al acesteia este  $A = 60^\circ$ .

### Rezolvare



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

- pentru ca emergența pe fața  $AC$  a prisme să nu poată avea loc, trebuie ca unghiul  $r_2$  să fie mai mare decât unghiul limită:

$$n \sin r_2 = n' \sin 90^\circ \Rightarrow \sin r_2 = \frac{n'}{n} = 0,88 \Rightarrow r_2 \approx 62,73^\circ$$

- știind că  $r_1 + r_2 = A$ , rezultă, în cazul refracției la limită:

$$r_1 = A - r_2 < 0$$

ceea ce înseamnă că nu este posibilă refracția la limită pe fața  $AC$  și nici refracția totală, pentru un unghi refringent de  $60^\circ$

- deoarece refracția pe a doua față a prisme este condiționată de unghiul prisme, pentru ca reflexia totală să fie posibilă, trebuie ca unghiul prisme să fie mai mare de  $60^\circ$ , de exemplu  $90^\circ$

- în acest caz, la limită:

$$r_1 = 90^\circ - 62,73^\circ = 27,27^\circ$$

și astfel se poate determina unghiul de incidență corespunzător:

$$n' \sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow \sin i_1 = \frac{n}{n'} \sin r_1 \approx 0,51 \Rightarrow i_1 \approx 31^\circ$$



## CAPITOLUL 4. DIOPTRUL SFERIC

Se numește *dioptru sferic* un sistem alcătuit din două medii transparente omogene, între care există o suprafață de separare sferică.

### 4.1. Caracterizarea dioptrului sferic

Fie un dioptru cu raza de curbura  $R$ , care separă două medii cu indicele de refracție  $n_1$ , respectiv  $n_2$ . Se va folosi următoarea convenție:

- pentru că dioptrul este limitat de o calotă sferică, se consideră drept origine a segmentelor pe axa optică vârful calotei,  $V$ , iar pentru alte segmente, punctul de incidență pe dioptru
- toate segmentele măsurate de-a lungul axei optice principale care au un capăt în vârful dioptrului se măsoară de la vârf spre dreapta (în sensul propagării luminii) și vor fi considerate pozitive, sau de la vârf spre stânga și vor fi considerate negative
- pe verticală, segmentele se măsoară de la axa optică în sus și atunci vor fi considerate pozitive sau în jos, iar atunci vor fi considerate negative
- unghiurile de incidență, respectiv de refracție, sunt pozitive dacă, pentru a suprapune raza peste normală, trebuie să rotim raza în sensul acelor de ceasornic
- unghiurile pe care le fac razele cu axa optică sunt pozitive dacă rotind axa optică în același sens, ea se suprapune peste rază

Se disting următoarele elemente ale dioptrului sferic (figura 4.1):

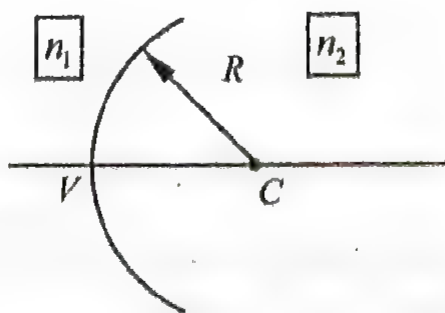


Figura 4.1. Elementele dioptrului sferic

- raza dioptrului,  $R$  (raza sferei din care face parte dioptrul)
- centrul dioptrului,  $C$  (centrul sferei din care face parte dioptrul)
- vârful dioptrului,  $V$
- axa optică principală a dioptrului,  $VC$  (trece prin vârful dioptrului și centrul optic al acestuia)
- axe optice secundare (orice dreaptă care trece prin centrul  $C$  și un punct oarecare al dioptrului, existând astfel o infinitate de axe optice secundare)
- indicii de refracție ai celor două medii,  $n_1$ , respectiv  $n_2$

## 4.2. Formarea imaginilor în dioptrul sferic

Se va studia formarea imaginilor în dioptrul sferic, în condițiile unor fasciculele incidente largi.

### 4.2.1. Imaginea sagitală

Fie  $SI$  o rază de lumină incidentă pe un dioptru sferic având raza de curbură  $R$  (figura 4.2).

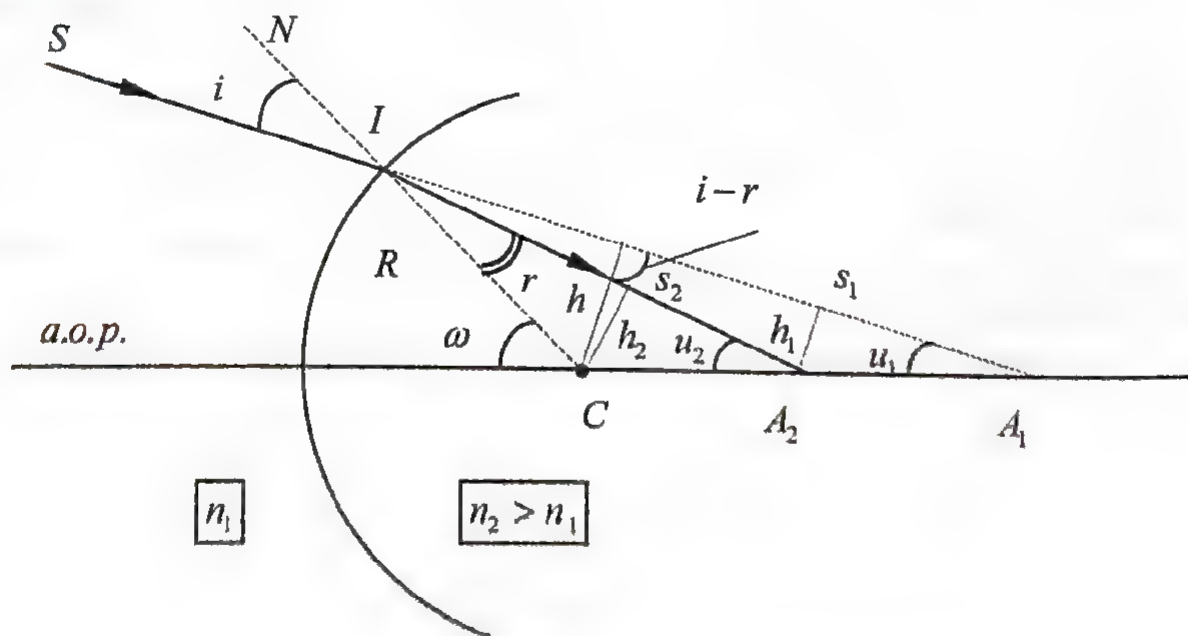


Figura 4.2. Formarea imaginii sagitale în dioptrul sferic

Aceasta se refractă în  $I$ , apoi se propagă pe drumul  $IA_2$ .

Se fac notațiile:

$$IA_1 = s_1; IA_2 = s_2$$

și se observă că:

$$Aria(\Delta A_1 IC) = Aria(\Delta A_1 IA_2) + Aria(\Delta A_2 IC)$$

Se exprimă cele trei arii din relația de mai sus:

$$\left. \begin{aligned} Aria(\Delta A_1 IC) &= \frac{s_1 h}{2} \\ \sin i &= \frac{h}{R} \Rightarrow h = R \sin i \end{aligned} \right\} \Rightarrow Aria(\Delta A_1 IC) = \frac{1}{2} s_1 R \sin i$$

$$\left. \begin{aligned} Aria(\Delta A_1 IA_2) &= \frac{s_1 h_1}{2} \\ \sin(i-r) &= \frac{h_1}{s_2} \Rightarrow h_1 = s_2 \sin(i-r) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Aria(\Delta A_1 IA_2) = \frac{1}{2} s_1 s_2 \sin(i-r)$$

$$\left. \begin{aligned} Aria(\Delta A_2 IC) &= \frac{h_2 s_2}{2} \\ \sin r &= \frac{h_2}{R} \Rightarrow h_2 = R \sin r \end{aligned} \right\} \Rightarrow Aria(\Delta A_2 IC) = \frac{1}{2} R s_2 \sin r$$

și rezultă egalitatea:

$$s_1 R \sin i = s_1 s_2 \sin(i-r) + R s_2 \sin r$$

$$s_1 R \frac{\sin i}{\sin r} = s_1 s_2 \left( \frac{\sin i}{\sin r} \cos r - \cos i \right) + R s_2$$

Dar:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

și se poate face înlocuirea:

$$s_1 R \frac{n_2}{n_1} = s_1 s_2 \left( \frac{n_2}{n_1} \cos r - \cos i \right) + R s_2 \quad | : s_1 s_2 R$$

$$\frac{1}{s_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2}{n_1} \cos r - \cos i \right) + \frac{1}{s_1} \quad | \cdot n_1$$

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{1}{R} (n_2 \cos r - n_1 \cos i)$$



relație care poartă numele de *ecuația imaginii sagitale*.

Toate razele care cad pe dioptru sub același unghi de incidență (ele se află pe un con cu vârful în  $A_1$ ) se întâlnesc după refracție în  $A_2$  (imaginea sagitală a izvorului virtual  $A_1$ ), imagine care se află pe axa optică. Dacă se variază poziția punctului  $I$  (unghiul de incidență  $i_1$ ), imaginea  $A_2$  descrie o porțiune din axa optică (*focala sagitală*).

### Observații

1. Dacă unghiul de incidență  $i$  este mic,  $\cos i \approx 1$ , iar pentru unghiul de refracție (care este mai mic decât cel de incidență, deoarece  $n_2 > n_1$ ) se poate scrie  $\cos r \approx 1$ , caz în care ecuația imaginii sagitale devine:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

2. Dacă raza dioptrului sferic este foarte mare,  $R \rightarrow \infty$ , ecuația imaginii sagitale se scrie:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2}{s_2}$$

indiferent de valoarea unghiului de incidență; aceasta este ecuația imaginii sagitale determinată la studiul dioptrului plan.

3. Dacă se pune condiția  $n_2 = -n_1$  (raza de lumină se întoarce în mediul din care a venit, deci suferă reflexie), ecuația imaginii sagitale devine:

$$\frac{-n_1}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{1}{R}(-n_1 \cos r - n_1 \cos i) \Leftrightarrow \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{R}(\cos r + \cos i)$$

Folosind legile reflexiei,  $i = r$ , relația de mai sus devine:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2 \cos i}{R}$$

obținându-se astfel ecuația imaginii sagitale a oglinzilor sferice (fascicule largi).

### 4.2.2. Imaginea tangențială

Fie două raze în același plan meridian, care întâlnesc suprafața dioptrului în punctele de incidență  $I_1$ , respectiv  $I_2$  (figura 4.3).

Observând că în  $\Delta I_1 A C$ ,  $\omega$  este unghi exterior, se poate scrie:

$$\omega = i + u_1 \Rightarrow i = \omega - u_1$$

De asemenea,  $\omega$  este exterior și triunghiului  $\Delta I_1 A_1 C$ :

$$\omega = r + u_2 \Rightarrow r = \omega - u_2$$

Diferențiind relațiile obținute, rezultă:

$$di = d\omega - du_1 \quad dr = d\omega - du_2$$

Se diferențiază și legea refracției aplicată în punctul  $I_1$  și se obține:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

$$n_1 \cos i \cdot di = n_2 \cos r \cdot dr$$

$$n_1 \cos i (d\omega - du_1) = n_2 \cos r (d\omega - du_2)$$

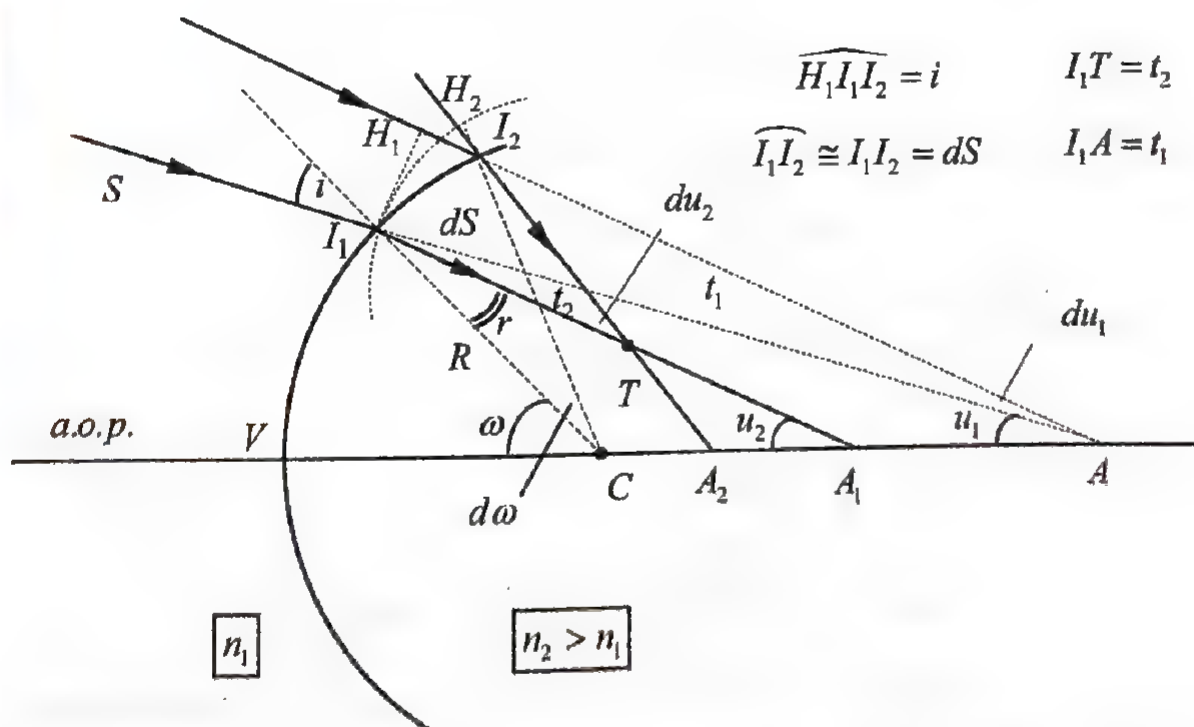


Figura 4.3. Formarea imaginii tangențiale în dioptrul sferic

CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

Se construiește un cerc cu raza  $t_1$  și cu centrul în  $A$ , care intersectează dreapta  $AI_2$  în  $H_1$ :

$$I_1A \equiv AH_1 = t_1$$

În triunghiul  $\Delta I_1H_1A$ , isoscel (figura 4.4.a), se construiește bisectoarea unghiului  $A$ , care este mediană, mediatoare și înălțime corespunzătoare coardei  $I_1H_1$ ; se formează două triunghiuri dreptunghice congruente, în care:

$$\sin \frac{du_1}{2} = \frac{\frac{I_1H_1}{2}}{t_1} \Rightarrow \frac{du_1}{2} = \frac{I_1H_1}{2t_1} \Rightarrow du_1 = \frac{I_1H_1}{t_1}$$

unde s-a ținut cont de faptul că pentru un unghi  $\alpha$  foarte mic, exprimat în radiani,  $\sin \alpha \approx \alpha$ . În plus, unghiul  $du_1$  fiind foarte mic, arcul  $\widehat{I_1H_1}$  se confundă cu coarda  $I_1H_1$ . Pe de altă parte, triunghiul  $\Delta I_1H_1I_2$  poate fi considerat dreptunghic în  $H_1$ , cu unghiul  $\widehat{H_1I_1I_2}$  aproximativ egal cu unghiul de incidență  $i$ . Se scrie astfel:

$$\cos \widehat{H_1I_1I_2} = \frac{I_1H_1}{I_1I_2}$$

sau, folosind notațiile din figurile 4.3 și 4.4:

$$\cos i = \frac{I_1H_1}{dS} \Rightarrow I_1H_1 = \cos i \cdot dS$$

Rezultă astfel:

$$du_1 = \frac{dS \cos i}{t_1}$$

Lucrând analog în  $\Delta I_1CI_2$ , isoscel, se obține (figura 4.4.b):

$$\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{\frac{I_1I_2}{2}}{R} \Rightarrow \frac{d\omega}{2} = \frac{dS}{2R} \Rightarrow d\omega = \frac{dS}{R}$$

Se construiește un cerc cu centrul în  $T$  și cu raza egală cu  $t_2$ ; acesta intersectează  $A_2I_2$  în  $H_2$ , iar unghiul  $\widehat{I_2I_1H_2} = r$ . Procedând ca în cazurile lui  $du_1$  și  $d\omega$ , se poate scrie (figura 4.4.c):

$$\left. \begin{aligned} \cos \widehat{H_2 I_1 I_2} &= \frac{I_1 H_2}{I_1 I_2} \Rightarrow I_1 H_2 = dS \cos r \\ \sin \frac{du_2}{2} &= \frac{\frac{I_1 H_2}{2}}{TH_2} \Rightarrow du_2 = \frac{I_1 H_2}{t_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow du_2 = \frac{dS \cos r}{t_2}$$

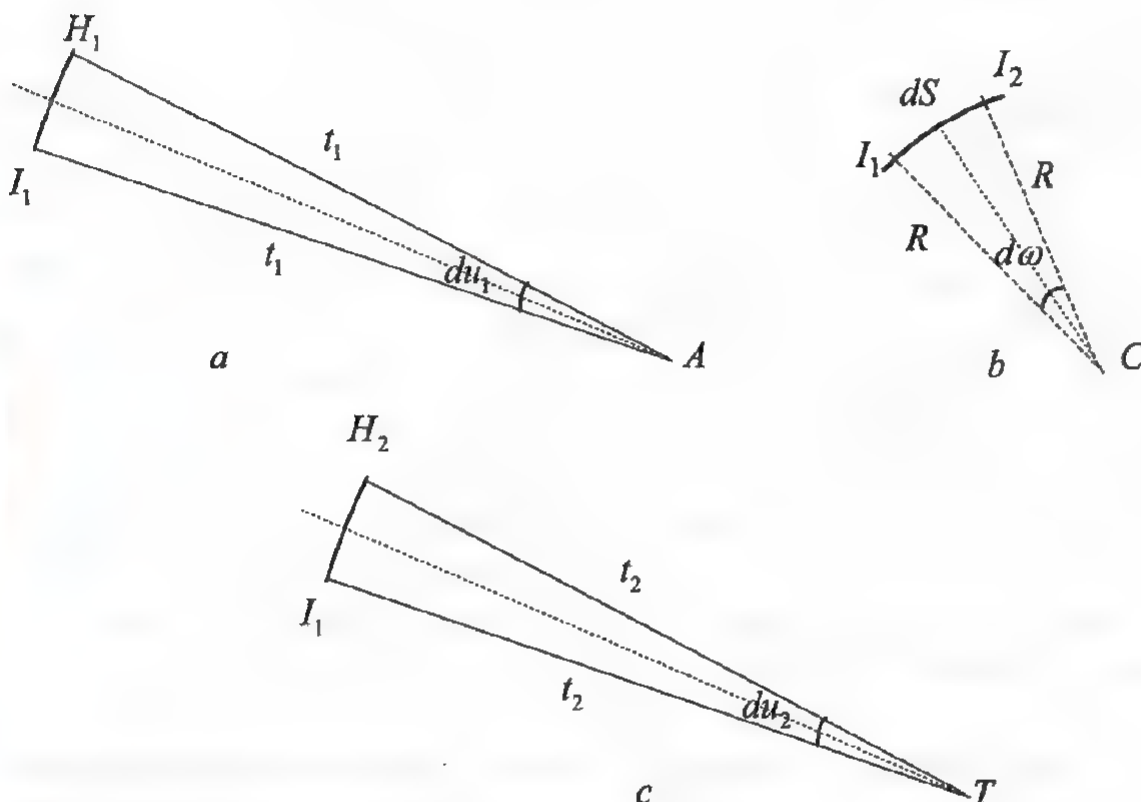


Figura 4.4. Construcții ajutătoare pentru determinarea lui  $du_1$ ,  $d\omega$ , respectiv  $du_2$

Cu aceste valori pentru  $d\omega$ ,  $du_1$  și  $du_2$ , rezultă:

$$\frac{n_1 \cos^2 i}{t_1} - \frac{n_2 \cos^2 r}{t_2} = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos r}{R}$$

expresie numită *ecuația imaginii tangențiale*.

Dacă se deplasează planul meridian care trece prin  $A$  spre stânga și spre dreapta poziției inițiale, imaginea  $T$  descrie un segment de dreaptă perpendicular pe acest plan (*focala tangențială*).



### Observații

1. Existența focalelor sagitală și tangențială arată faptul că dioptrul sferic nu este stigmatic în cazul fasciculelor largi.

2. Dacă unghiul de incidență  $i$  este mic, imaginile  $A_1$  și  $T$  se confundă, iar ecuația de mai sus devine:

$$\frac{n_2}{t_2} - \frac{n_1}{t_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

sau, sub o formă simetrică:

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_1}{R} = \frac{n_2}{p_2} - \frac{n_2}{R} = Q_0$$

unde  $Q_0$  este invariantul de ordin 0 al lui Abbe.

3. Dacă raza dioptrului sferic este foarte mare,  $R \rightarrow \infty$ , acesta devine dioptru plan, iar ecuația imaginii tangențiale se scrie:

$$\frac{n_1 \cos^2 i}{t_1} - \frac{n_2 \cos^2 r}{t_2} = 0$$

relație întâlnită deja sub numele de ecuația imaginii tangențiale a dioptrului plan.

4. Dacă se pune condiția  $n_2 = -n_1$  (raza de lumină se întoarce în mediul din care a venit, în urma fenomenului de reflexie), ecuația imaginii tangențiale devine:

$$\frac{n_1 \cos^2 i}{t_1} - \frac{-n_1 \cos^2 r}{t_2} = \frac{n_1 \cos i - (-n_1) \cos r}{R}$$

$$\frac{n_1 \cos^2 i}{t_1} + \frac{n_1 \cos^2 r}{t_2} = \frac{n_1 \cos i + n_1 \cos r}{R}$$

respectiv, ținând cont de a doua lege a reflexiei:

$$\frac{\cos^2 i}{t_1} + \frac{\cos^2 r}{t_2} = \frac{\cos i + \cos r}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{2}{R \cos i}$$

obținându-se astfel ecuația imaginii tangențiale a oglinzilor sferice.

### 4.3. Dioptrul sferic în aproximația lui Gauss

În general, formarea unor imagini stigmatice prin sisteme optice este aproape imposibilă și este legată în primul rând de dificultatea obținerii în practică a unor sisteme optice care să dea un stigmatism riguros.

Într-o imagine stigmatică, fiecărui punct al obiectului luminos îi corespunde un singur punct imagine, ceea ce nu se întâmplă în realitate, când imaginea unui punct obiect este de regulă o pată luminoasă, care poate fi percepută ca fiind punctiformă atâta timp cât dimensiunile sale rămân sub o anumită limită, caracteristică receptorilor. Este și cazul ochiului uman, care percepe două puncte situate una față de alta la o distanță mai mică de  $5 \cdot 10^{-6} m$  ca fiind neseperate.

Putem vorbi astfel de stigmatismul aproximativ al sistemelor optice, care se poate realiza dacă se folosesc fascicule înguste, apropiate de axa optică a acestora, foarte puțin înclinate față de aceasta. Aceste fascicule se numesc *paraxiale*, iar aproximația în care se lucrează cu acestea se numește *aproximația razelor paraxiale* sau *aproximația lui Gauss*.

#### 4.3.1. Relațiile fundamentale ale dioptrului sferic

Fie un obiect punctiform  $O_1$  situat într-un mediu de indice de refracție  $n_1$ . Dacă unghiurile de incidență sunt mici pentru toate razele fascicolului provenit de la obiect, se lucrează în aproximația lui Gauss, în care imaginea obiectului printr-un dioptru sferic de rază  $R$  se formează în punctul  $O_2$  (figura 4.5).

Se aplică succesiv teorema sinusului în:

$$\Delta O_1 C: \frac{IO_1}{\sin \alpha} = \frac{O_1 C}{\sin(\pi - i)}$$

$$\Delta IO_2 C: \frac{IO_2}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{O_2 C}{\sin r}$$

Ținând cont că  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$  și  $\sin(\pi - i) = \sin i$ , rezultă:

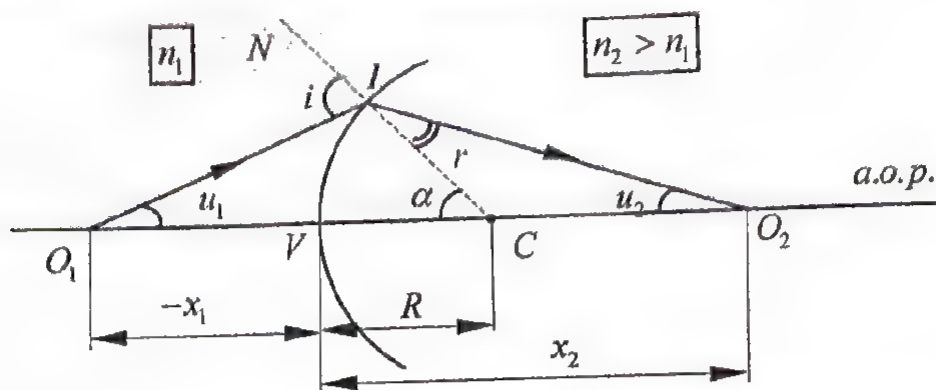


Figura 4.5. Formarea imaginii unui obiect punctiform printr-un dioptru sferic (aproximația Gauss)

$$\left. \begin{aligned} \frac{IO_1}{\sin \alpha} = \frac{O_1C}{\sin i} &\Rightarrow \frac{IO_1}{O_1C} = \frac{\sin \alpha}{\sin i} \\ \frac{IO_2}{\sin \alpha} = \frac{O_2C}{\sin r} &\Rightarrow \frac{O_2C}{IO_2} = \frac{\sin r}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{IO_1}{O_1C} \cdot \frac{O_2C}{IO_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin i} \cdot \frac{\sin r}{\sin \alpha} = \frac{\sin r}{\sin i}$$

Dar, din legea refracției:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_1}{n_2}$$

de unde:

$$\frac{IO_1}{O_1C} \cdot \frac{O_2C}{IO_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Lucrând în aproximația gaussiană, se consideră:

$$IO_1 = VO_1 = -x_1$$

$$IO_2 = VO_2 = x_2$$

$$O_1C = VO_1 + VC = R - x_1$$

$$O_2C = VO_2 - VC = x_2 - R$$

rezultând:

$$\frac{-x_1}{R - x_1} \cdot \frac{x_2 - R}{x_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$-x_1 x_2 n_2 + x_1 R n_2 = n_1 x_2 R - x_1 x_2 n_1$$

$$x_1 x_2 (n_1 - n_2) = R (n_1 x_2 - n_2 x_1) \quad | : x_1 x_2 R$$

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1}$$

Această relație poartă numele de *prima relație fundamentală a dioptrului sferic*, sau *relația punctelor conjugate*.

### Observație

Dacă în ecuațiile imaginilor sagitală, respectiv tangențială, ale dioptrului sferic se pune condiția ca unghiul de incidență să fie foarte mic (aproximație Gauss), rezultă următoarele consecințe:

- unghiul de refracție este și mai mic pentru  $n_2 > n_1$ , deci  $\cos i \approx 1$ ,  $\cos r \approx 1$
- ecuația imaginii sagitale devine:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

iar cea a imaginii tangențiale:

$$\frac{n_2}{t_2} - \frac{n_1}{t_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

- analizând figurile 4.2 și 4.3, se observă că se pot scrie egalitățile:

$$s_1 = t_1 (= x_1)$$

$$s_2 = t_2 (= x_2)$$

respectiv relația:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

adică chiar ecuația punctelor conjugate pentru dioptrul sferic în aproximația lui Gauss.

Se observă că în afara aproximației Gauss, dioptrul sferic nu este stigmatic, în timp ce în aproximația Gauss, el este stigmatic pentru orice punct obiect, pentru că, pentru o poziție dată  $x_1$  a obiectului, se obține o singură poziție a imaginii,  $x_2$  (care nu depinde de unghiul de incidență!).

Se definește *mărirea linară transversală*, notată  $\beta$ , ca fiind raportul dintre mărimea imaginii ( $y_2$ ) și mărimea obiectului ( $y_1$ ):



$$\beta = \frac{y_2}{y_1}$$

Se consideră un obiect liniar  $A_1B_1$ , de înălțime  $y_1$ , așezat perpendicular pe axa optică a unui dioptru sferic de rază  $R$ . Imaginea reală  $A_2B_2$  a obiectului are înălțimea  $y_2$  (figura 4.6).

Conform figurii 4.6, se poate scrie:

$$-y_2 = x_2 \operatorname{tg} r \approx x_2 \sin r$$

$$y_1 = -x_1 \operatorname{tg} i \approx -x_1 \sin i$$

unde s-a ținut cont de faptul că unghiurile  $i$  și  $r$  sunt mici (lucrând în aproximația Gauss).

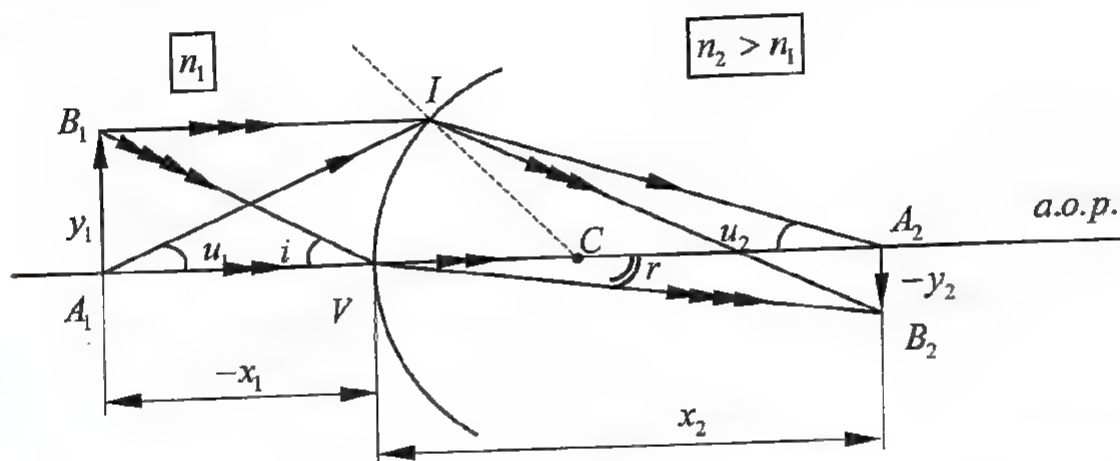


Figura 4.6. Formarea imaginii unui obiect liniar, așezat perpendicular pe axa optică, printr-un dioptru sferic (aproximația Gauss)

Respectând și legea refracției, rezultă pentru mărirea liniară transversală expresia:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{-x_2 \sin r}{-x_1 \sin i} \Rightarrow \beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

Aceasta este a doua relație fundamentală a dioptrului sferic.

#### 4.3.2. Focarele dioptrului sferic

Focarul obiect al dioptrului sferic reprezintă locul de pe axa optică unde trebuie să fie situat un izvor luminos punctiform, pentru ca razele care pleacă de la el să părăsească dioptrul paralel cu axa optică.

*Focarul imagine* al dioptrului sferic reprezintă locul de pe axa optică în care se întâlnesc razele refractate provenite de la un fascicul incident paralel.

Pe axul optic principal există două focare principale (cel obiect și cel imagine). Pe axele secundare, vor exista câte două focare secundare, situate în planul focal obiect, respectiv imagine.

La fel ca orice imagine obținută printr-un sistem optic, focarele pot fi:

- reale, dacă se obțin din intersecția razelor reale (figura 4.7)

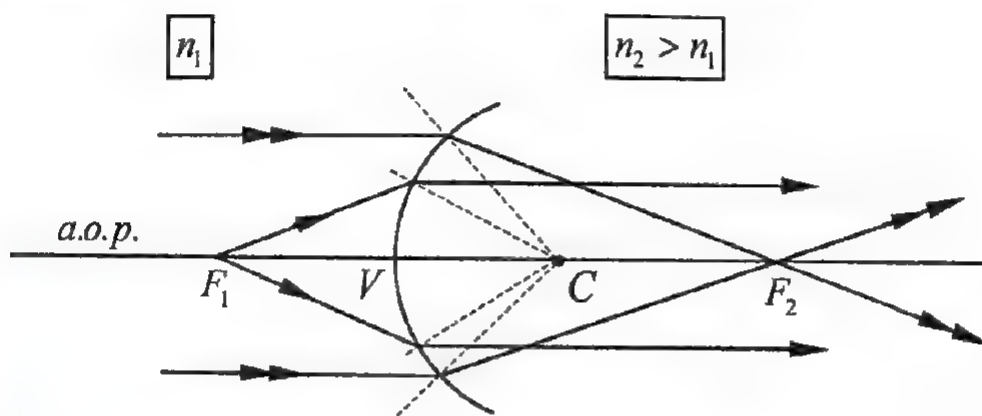


Figura 4.7. Obținerea focarelor reale ( $n_2 > n_1$ ,  $R > 0$ )

- virtuale, dacă se obțin prin prelungirea razelor (figura 4.8)

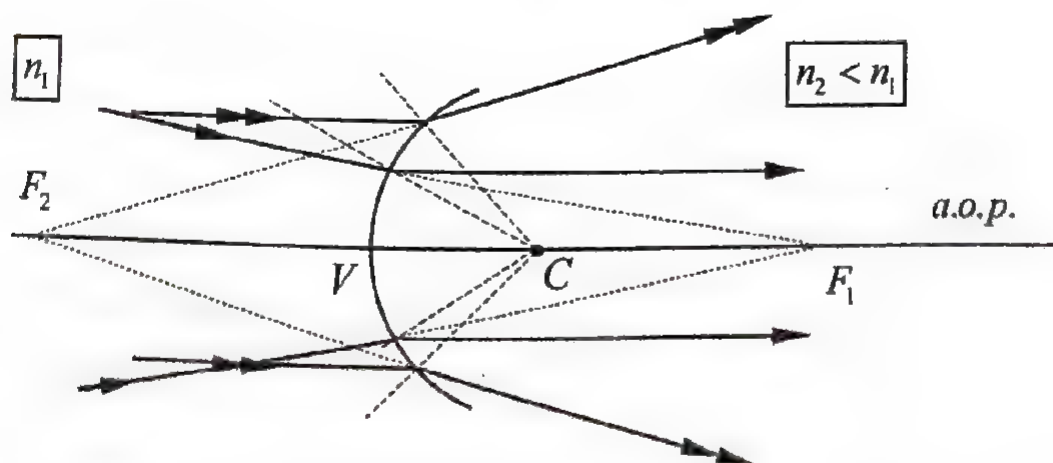


Figura 4.8. Obținerea focarelor virtuale ( $n_2 < n_1$ ,  $R > 0$ )

Distanțele focale se obțin din relația punctelor conjugate:

- distanța focală obiect: se pune condiția ca imaginea să se formeze la infinit:

$$x_2 \rightarrow \infty \Rightarrow x_1 \rightarrow f_1$$

$$f_1 = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_1 = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{x_2 n_1 R}{n_2 R - (n_2 - n_1) x_2} = -\frac{R n_1}{n_2 - n_1}$$

- distanța focală imagine: se pune condiția ca obiectul să fie situat la infinit:

$$x_1 \rightarrow \infty \Rightarrow x_2 \rightarrow f_2$$

$$f_2 = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_2 = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{x_1 n_2 R}{n_1 R + (n_2 - n_1) x_1} = \frac{R n_2}{n_2 - n_1}$$

### Observații

1. În cazul în care al doilea mediu este mai refringent decât primul,  $n_2 > n_1$ :

- dacă  $R > 0$ , atunci  $f_1 < 0$ ,  $f_2 > 0$ , adică situația din figura 4.7, când focarele sunt reale

- dacă  $R < 0$ , atunci  $f_1 > 0$ ,  $f_2 < 0$ , adică situația din figura 4.9, când focarele sunt virtuale

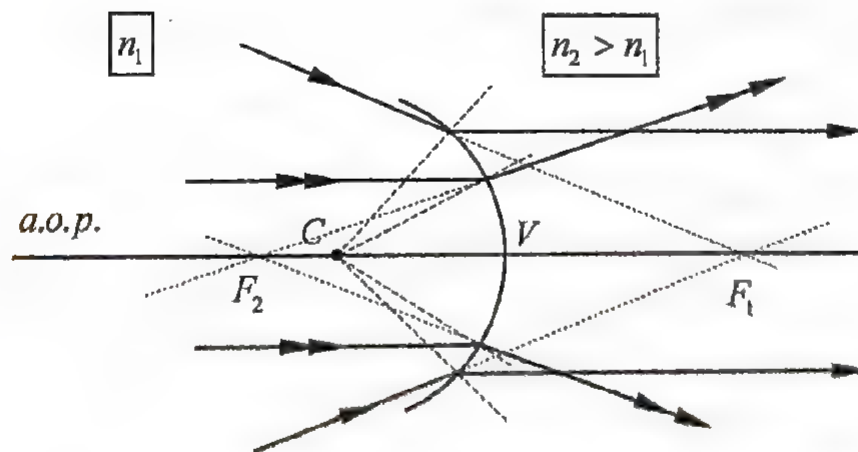


Figura 4.9. Obținerea focarelor virtuale ( $n_2 > n_1$ ,  $R < 0$ )

2. În cazul în care al doilea mediu este mai puțin refringent decât primul,  $n_2 < n_1$ :

- dacă  $R > 0$ , atunci  $f_1 > 0$ ,  $f_2 < 0$ , adică situația din figura 4.8, când focarele sunt virtuale
- dacă  $R < 0$ , atunci  $f_1 < 0$ ,  $f_2 > 0$ , adică situația din figura 4.10, când focarele sunt reale

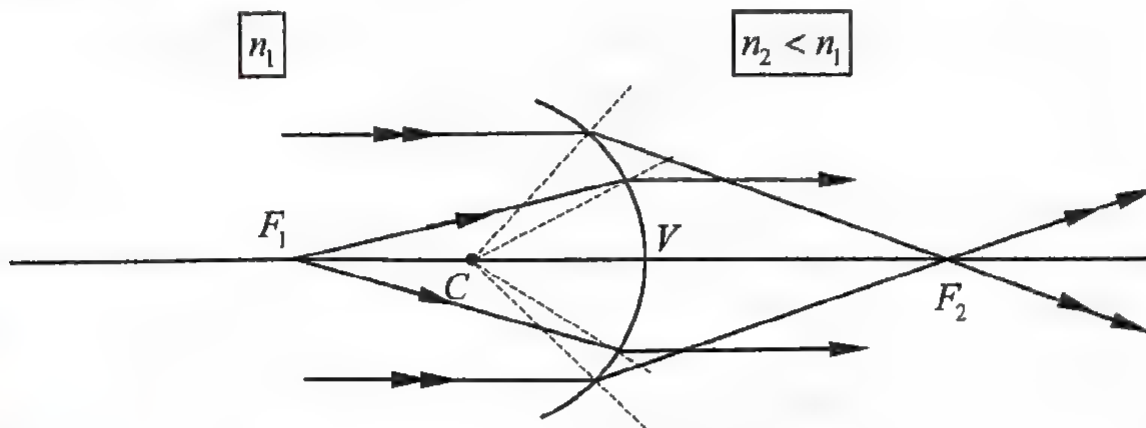


Figura 4.10. Obținerea focarelor reale ( $n_2 < n_1$ ,  $R < 0$ )

3. Relația punctelor conjugate se poate rescrie folosind expresiile celor două distanțe focale:

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} \quad \left| \cdot \frac{R}{n_2 - n_1} \right.$$

$$1 = \frac{1}{x_2} \cdot \frac{Rn_2}{n_2 - n_1} - \frac{1}{x_1} \cdot \frac{Rn_1}{n_2 - n_1}$$

$$\frac{f_2}{x_2} + \frac{f_1}{x_1} = 1$$

4. Dacă în formulele fundamentale ale dioptrului sferic se consideră că  $n_2 = -n_1$ , se vor obține relațiile caracteristice oglinzilor sferice, așa cum au fost acestea deduse la momentul respectiv<sup>10</sup>:

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} \xrightarrow{n_2 = -n_1} \frac{-2n_1}{R} = -n_1 \left( \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} \right) \xRightarrow{f = \frac{R}{2}} \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$$

<sup>10</sup>  $n_2 = -n_1$  înseamnă că lumina se întoarce prin reflexie în mediul din care a venit



$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \stackrel{n_2 \rightarrow -n_1}{\Rightarrow} \beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{-n_1} = -\frac{x_2}{x_1}$$

5. Dacă în expresiile distanțelor focale ale dioptrului sferic se înlocuiește  $n_2$  cu  $-n_1$ , se obține pentru distanța focală obiect:

$$f_1 = -\frac{Rn_1}{n_2 - n_1} \stackrel{n_2 = -n_1}{=} \frac{Rn_2}{2n_2} = \frac{R}{2}$$

iar pentru distanța focală imagine:

$$f_2 \stackrel{n_2 = -n_1}{=} \frac{Rn_2}{n_2 - n_1} = \frac{Rn_2}{2n_2} = \frac{R}{2} = f_1 = f$$

deci cele două distanțe focale sunt egale și reprezintă, după cum era de așteptat, chiar distanța focală a oglinzilor sferice, egală cu jumătate din rază.

#### 4.4. Asociații de dioptri sferici. Lentile subțiri

O porțiune dintr-un mediu transparent mărginit de doi dioptri sferici formează o *lentilă sferică*<sup>11</sup> (figura 4.11).

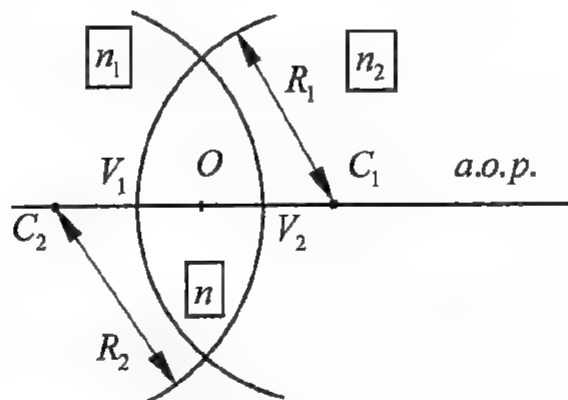


Figura 4.11. Elementele unei lentile sferice

Elementele unei lentile sunt:

- grosimea lentilei, dată de distanța dintre vârfurile dioptrilor sferici care alcătuiesc lentila,  $d = V_1V_2$

<sup>11</sup> În cele ce urmează, prin termenul „lentilă” se va desemna doar lentila sferică

- centrele de curbură  $C_1$  și  $C_2$  ale celor doi dioptri
- centrul optic al lentilei,  $O$ , situat la intersecția lentilei cu axa optică principală
- axa optică principală a lentilei,  $C_1C_2$ , care trece prin centrul optic al acesteia;
- $V_1, V_2$ : vârfurile celor doi dioptri care mărginesc lentila
- $R_1, R_2$ : razele de curbură ale suprafețelor sferice care mărginesc lentila

Orice dreaptă care trece prin centrul optic al lentilei, cu excepția axei optice principale, poartă numele de *axă optică secundară*; există, prin urmare, o infinitate de axe optice secundare.

O lentilă este considerată *subțire* atunci când grosimea sa este mică în comparație cu razele de curbură ale dioptrilor sferici care o delimitează. Punctele  $V_1$  și  $V_2$  vor coincide, practic, cu centrul optic al lentilei.

Lentilele se pot clasifica în:

- lentile *convergente*, care transformă un fascicul incident paralel într-un fascicul convergent; ele au marginea subțire și mijlocul gros și se împart în biconvexe, plan-convexe și menisc convergent (figura 4.12)

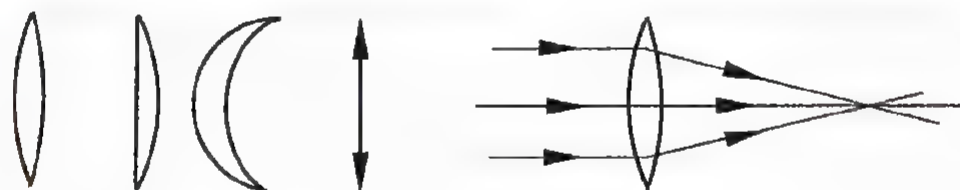


Figura 4.12. Lentila convergentă

- lentile *divergente*, care transformă un fascicul incident paralel într-un fascicul divergent; ele au marginea groasă și mijlocul subțire și se împart în biconcave, plan-concave și menisc divergent (figura 4.13).



Figura 4.13. Lentila divergentă

## 4.4.1. Formarea imaginilor în lentila subțire

Fiind mărginită de doi dioptri sferici, refracția luminii într-o lentilă poate fi studiată ca o succesiune de două refracții pe cei doi dioptri (figura 4.14).

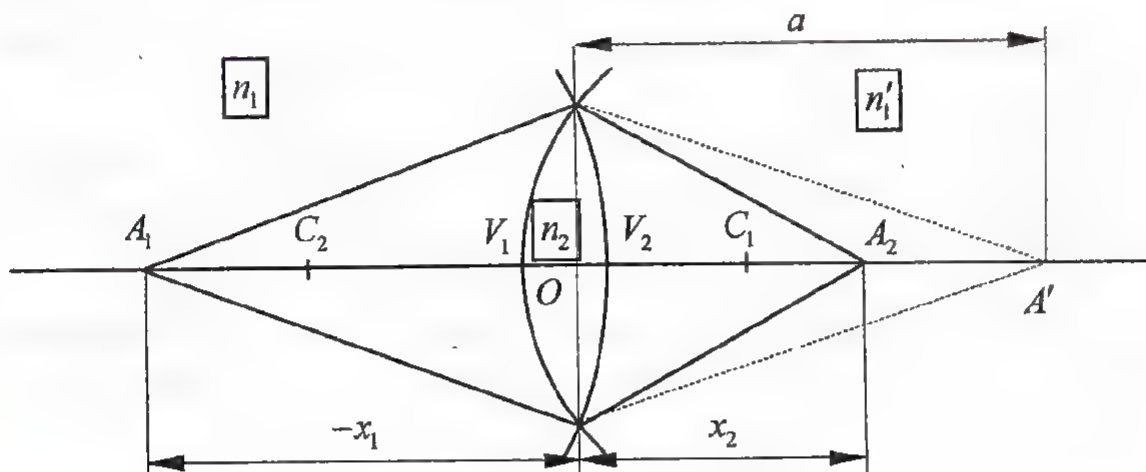


Figura 4.14. Refracția luminii printr-o lentilă

Fie  $A_1$  un obiect punctiform, situat pe axa optică principală a unei lentile, în mediul cu indicele de refracție  $n_1$ .

Primul dioptru, de rază  $R_1$ , formează imaginea obiectului în punctul  $A'$ , situat în mediul având indicele de refracție  $n_2$ . Imaginea  $A'$  este preluată ca obiect de cel de-al doilea dioptru, având raza de curbură  $-R_2$ .  $A'$  devine astfel o imagine intermediară, imaginea sa în al doilea dioptru formându-se în  $A_2$ , acesta devenind imaginea finală a obiectului prin sistemul considerat.

Pentru primul dioptru se poate scrie relația:

$$\frac{n_2}{a} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

În cazul celui de-al doilea dioptru, obiectul (imaginea intermediară  $A'$ ) se află în mediul având indicele de refracție  $n_2$ , imaginea finală formându-se în mediul cu indicele de refracție  $n_1$ . Rezultă:

$$\frac{n'_1}{x_2} - \frac{n_2}{a} = \frac{n'_1 - n_2}{R_2}$$

De regulă, mediile din stânga, respectiv din dreapta lentilei, sunt identice, deci se poate scrie:

$$n_1 = n'_1$$

Adunând relațiile obținute pentru cei doi dioptri, rezultă:

$$\frac{n_1}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Se notează:

$$\frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n$$

și poartă numele de indice de refracție relativ al celui de al doilea mediu față de primul. Rezultă astfel:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Relația poartă numele de *formula fundamentală a lentilelor subțiri*.

### Observație

Este utilă precizarea că relația de mai sus a fost obținută respectând convenția geometrică de semne enunțată la dioptrii sferici. Adaptată la cazul lentilelor subțiri, ea stabilește că toate segmentele de-a lungul axei optice principale, care au un capăt în centrul optic al lentilei, se măsoară pornind de la acesta:

- spre dreapta (în sensul propagării luminii), caz în care sunt pozitive
- spre stânga și atunci sunt negative

Pe verticală, segmentele se măsoară de la axa optică principală în sus și atunci vor fi considerate pozitive sau în jos, iar atunci vor fi considerate negative.

*Distanțele focale* ale lentilelor subțiri se definesc ca în cazul dioptrului sferic (figura 4.15).

- *focarul principal obiect* reprezintă locul unde trebuie să fie situat un izvor punctiform, pentru ca razele care provin de la acesta să părăsească lentila paralel cu axul optic principal.



- *focarul principal imagine* reprezintă locul de pe axa optică principală în care se întâlnesc razele emergente provenite de la un fascicul incident paralel cu axa optică principală.

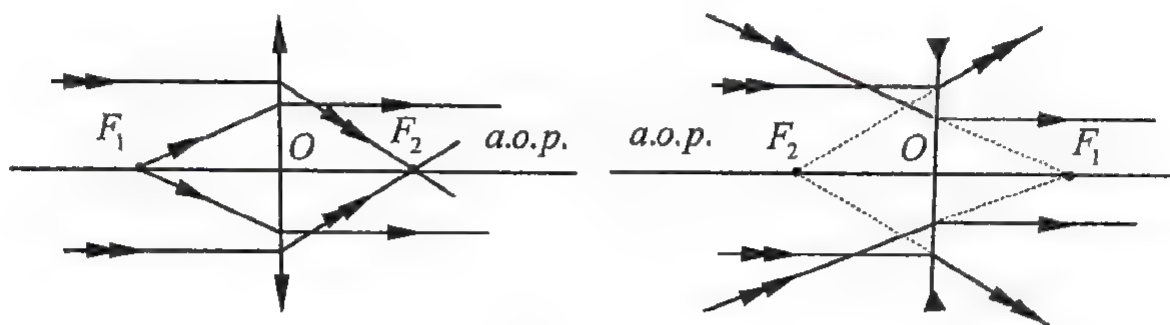


Figura 4.15. Focarele lentilelor subțiri

Planul care trece printr-un focar al lentilei și este perpendicular pe axa optică principală poartă numele de *plan focal*. Punctele situate în planul focal, care nu sunt focare principale, poartă numele de *focare secundare* (figura 4.16).

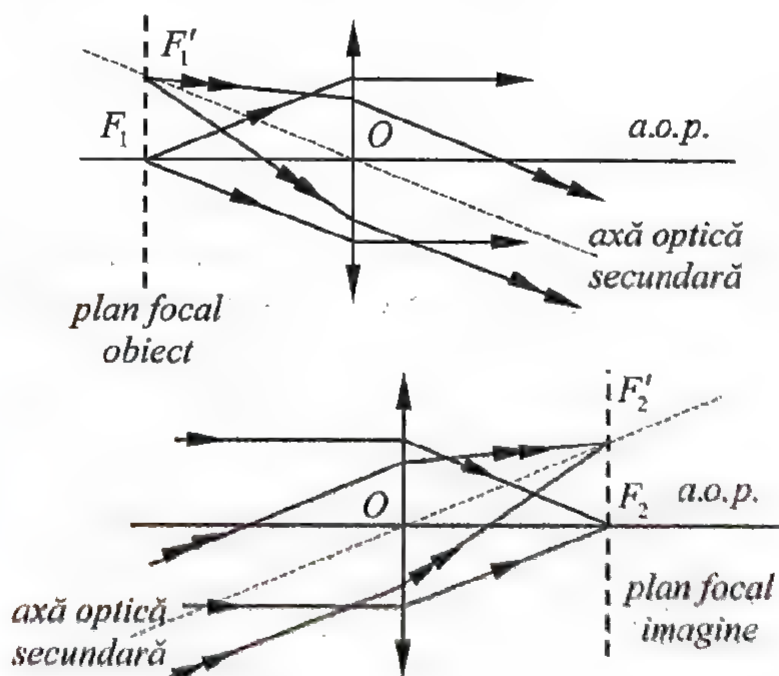


Figura 4.16. Stabilirea poziției focarelor secundare

Distanțele focale sunt:

- *distanța focală obiect:*

$$f_1 = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_1 = -\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

- distanța focală imagine:

$$f_2 = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_2 = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

Rezultă că:

$$f_2 = -f_1 = f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

adică focarele sunt așezate de o parte și de alta a lentilei, la egală distanță față de aceasta.

### Observație

Se observă că natura constructivă a lentilelor, reflectată în caracteristica optică de material  $\frac{n_2}{n_1}$  și în semnul convențional atribuit razelor  $R_1$  și  $R_2$ , determină natura focarelor sale (reale sau virtuale). Dacă  $n_2 > n_1$  (s-a considerat că lentila este mărginită de același mediu, având indicele de refracție  $n_1$ ), situația este cea din tabelul 4.1.

Folosind expresiile de mai sus, formula fundamentală a lentilelor subțiri devine:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$$

Raportul

$$\frac{1}{f} = C$$





poartă numele de *convergență* sau *putere optică* a lentilei.

$$\langle C \rangle_{SI} = 1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ dioptrie}$$



Prin urmare, o *dioptrie* este convergența unei lentile având distanța focală egală cu 1 m.

Tabelul 4.1. Reguli de semn pentru lentile subțiri ( $n_2 > n_1$ )

Nr. crt.	Tipul lentilei	Forma geometrică a lentilei	Semnul razelor	Semnul distanțelor focale	Natura focarelor
1	convergență	biconvexă	$R_1 > 0$ $R_2 < 0$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale
2		plan-convexă	$R_1 \rightarrow \infty$ $R_2 < 0$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale
3		menisc convergent	$R_1 > 0$ $R_2 \rightarrow \infty$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale
			$R_1 < 0$ $R_2 < 0$ $ R_2  <  R_1 $	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale

3		menisc convergent		$R_1 > 0$ $R_2 > 0$ $R_1 < R_2$	$f_1 < 0$ $f_2 > 0$	focare reale
4	divergentă	biconcavă		$R_1 < 0$ $R_2 > 0$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale
5		plan-concavă		$R_1 \rightarrow \infty$ $R_2 > 0$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale
				$R_1 < 0$ $R_2 \rightarrow \infty$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale



6		menisc divergent		$R_1 < 0$ $R_2 < 0$ $ R_2  >  R_1 $	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale
				$R_1 > 0$ $R_2 > 0$ $R_2 < R_1$	$f_1 > 0$ $f_2 < 0$	focare virtuale

Mărirea liniară a unei lentile subțiri se calculează ca raport între mărimea imaginii și cea a obiectului. Folosind notațiile din figura 4.17, din asemănarea triunghiurilor  $\Delta A_1B_1O$  și  $\Delta A_2B_2O$  rezultă:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1O}{B_2O} \Rightarrow \frac{y_1}{-y_2} = \frac{-x_1}{x_2} \Rightarrow \beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

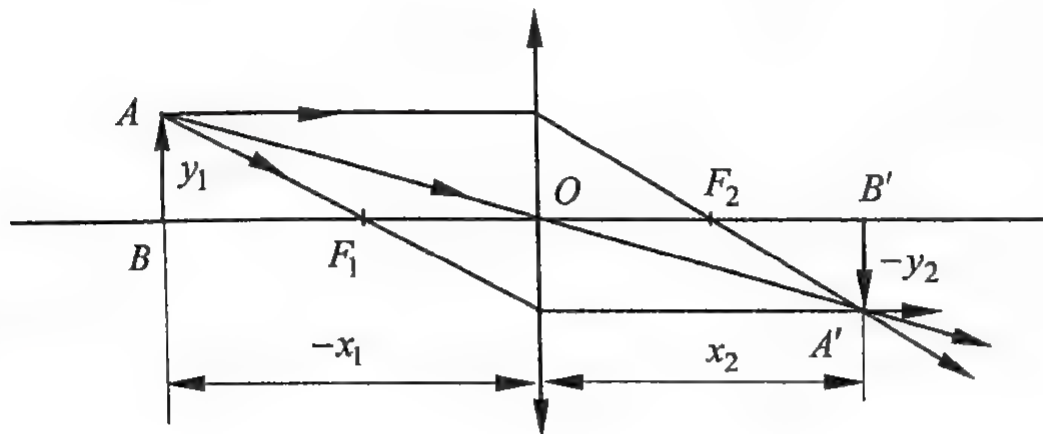


Figura 4.17. Formarea imaginii unui obiect liniar printr-o lentilă convexă

### Observație

Sunt utile câteva *reguli de construire a imaginilor* prin lentile (figura 4.18):

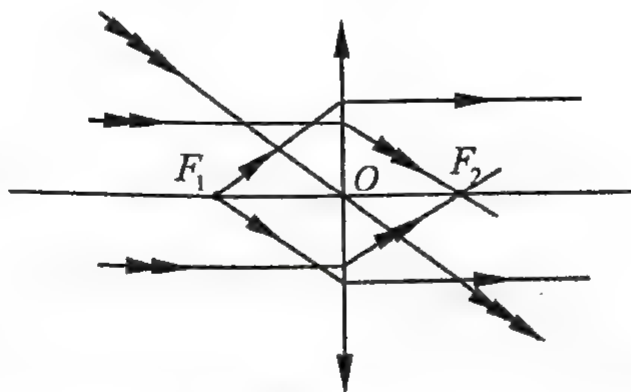


Figura 4.18. Reguli de construire a imaginii printr-o lentilă subțire

- raza incidentă care trece prin focarul obiect părăsește lentila paralel cu axa optică principală
- raza incidentă paralelă cu axa optică principală, după ce părăsește lentila, trece prin focarul imagine

- raza incidentă a cărei direcție trece prin centrul optic al lentilei, se propagă mai departe nedeviată

### Observații

Folosind regulile de construire a imaginilor în lentile, rezultă următoarele:

a) în cazul lentilelor convergente (tabelul 4.2):

- obiectele situate dincolo de focarul obiect au o imagine reală
- imaginea obiectului situat în focarul obiect se formează la infinit
- obiectele situate între lentilă și focar vor avea o imagine virtuală (se spune că lentila funcționează ca și lupă)

b) în cazul lentilelor divergente (figura 4.19)

- lentilele sferice divergente formează numai imagini virtuale, indiferent de poziția obiectului luminos; imaginile sunt drepte, situate în spațiul obiect și mai mici decât obiectul

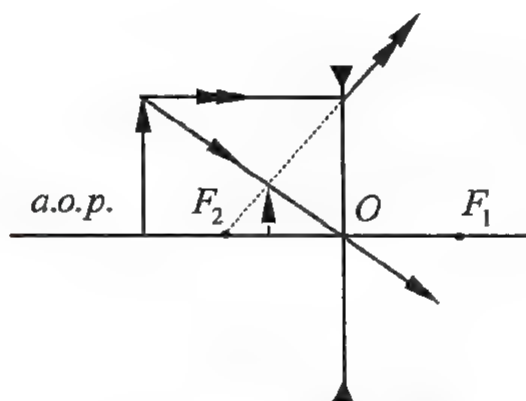


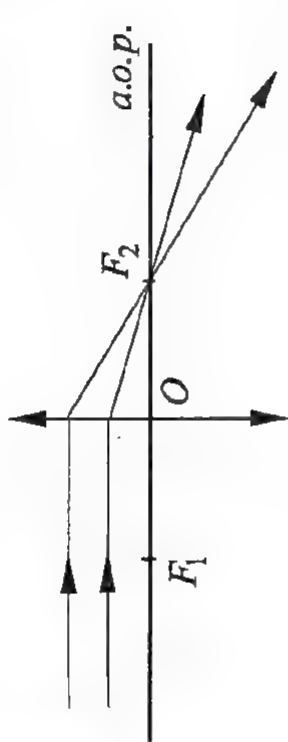
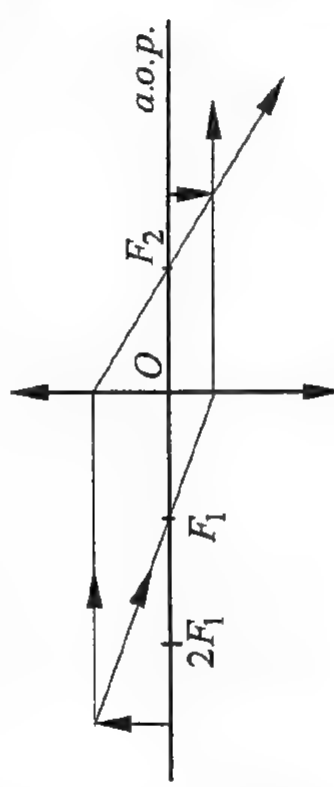
Figura 4.19. Formarea imaginilor în lentila sferică divergentă

### 4.4.2. Asociații de lentile subțiri

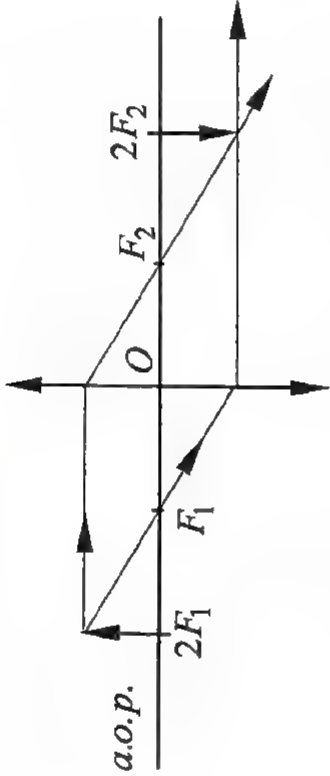
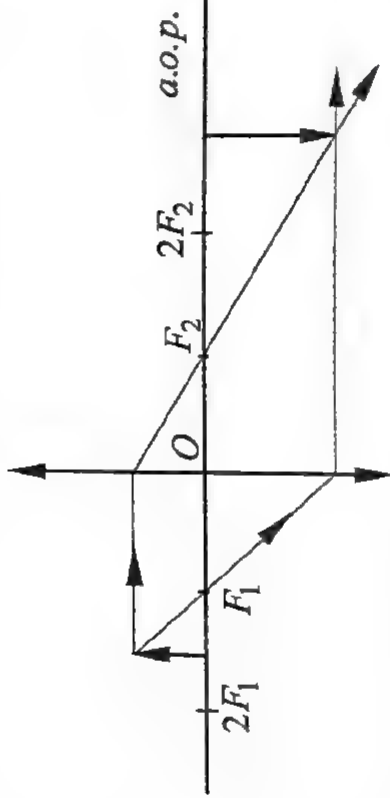
Fie două lentile subțiri, care au aceeași axă optică și sunt situate la distanța  $d$  una de alta. Se consideră un obiect liniar  $A_1B_1$ , perpendicular pe axa optică principală a sistemului. Imaginea  $A'_1B'_1$  a acestuia prin prima lentilă devine obiect pentru cea de a doua, obținându-se imaginea finală  $A_2B_2$  (figura 4.20).

Cu notațiile din figură, se poate scrie:

Tabelul 4.2. Formarea imaginilor în lentila convergentă

Nr. crt.	Poziția obiectului	Formarea imaginii	Caracterizarea imaginii
1	- la infinit		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- punctiformă (se obține focarul obiect al lentilei)</li> </ul>
2	- dincolo de dublul distanței focale		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- răsturnată</li> <li>- mai mică decât obiectul</li> </ul>



3	- la dublul distanței focale		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- răsturnată</li> <li>- egală ca mărime cu obiectul</li> <li>- situată la dublul distanței focale față de lentilă</li> </ul>
4	- între focar și dublul distanței focale		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- răsturnată</li> <li>- mai mare decât obiectul</li> <li>- situată dincolo de dublul distanței focale față de lentilă</li> </ul>

5	- în focarul obiect		<ul style="list-style-type: none"> <li>- reală</li> <li>- se formează la infinit</li> <li>- mărime infinită</li> </ul>
6	- între lentilă și focar		<ul style="list-style-type: none"> <li>- virtuală</li> <li>- dreaptă</li> <li>- mai mare decât obiectul</li> </ul>

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f_1} &= \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{f_2} &= \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1}$$

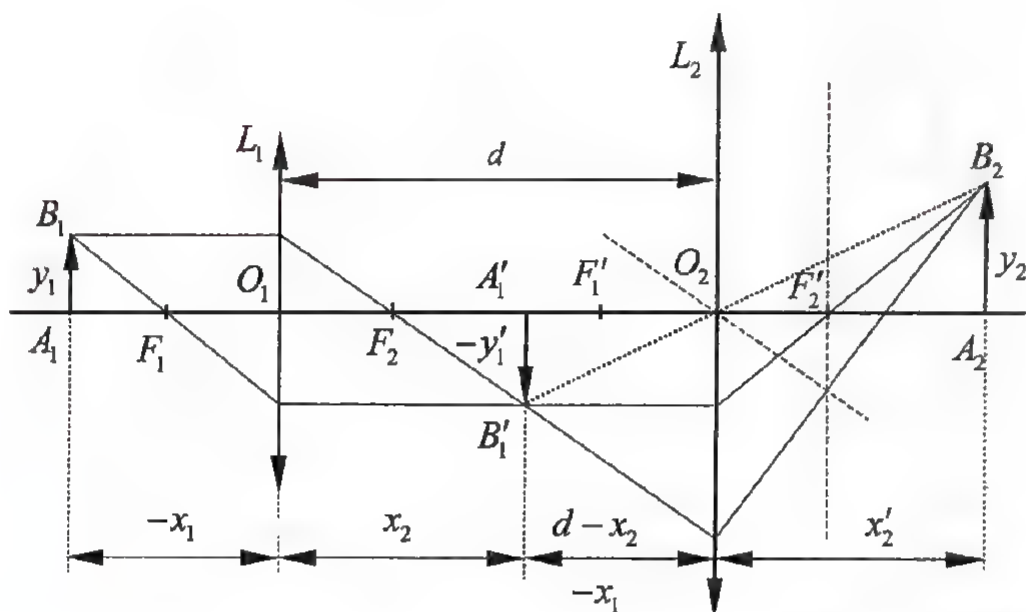


Figura 4.20. Formarea imaginii printr-un sistem de două lentile subțiri

Dar  $d = x_2 + (-x'_1) \Rightarrow x'_1 = x_2 - d$ , deci suma convergențelor devine:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{d - x_2}$$

Dacă lentilele sunt lipite (acolate;  $d = 0$ ):

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1}$$

Membrul drept cuprinde cele două distanțe conjugate, distanța sistem-obiect  $x_1$  și distanța sistem-imagine,  $x'_2$ . Rezultă expresia:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1}$$

Aceasta este *formula punctelor conjugate pentru sistemul de lentile alipite*; convergența sistemului este egală cu suma convergențelor lentilelor componente:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

În cazul unui sistem de  $n$  lentile subțiri lipite:

$$\frac{1}{F} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{f_k}$$

Din figura 4.20 rezultă că:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{y'_1}{y_1} \cdot \frac{y_2}{y'_1} = \beta_1 \cdot \beta_2$$

deci mărirea liniară transversală a sistemului este egală cu produsul măririlor liniare ale componentelor sistemului. Generalizând:

$$\beta = \prod_{k=1}^n \beta_k$$

### Observație

Dacă focarul imagine al primei lentile coincide cu focarul obiect al celei de-a doua, sistemul poartă numele de *sistem telescopic (afocal)* (figura 4.21): o rază paralelă cu axa optică principală, incidentă pe sistemul de lentile, va părăsi acest sistem paralel cu axa optică.

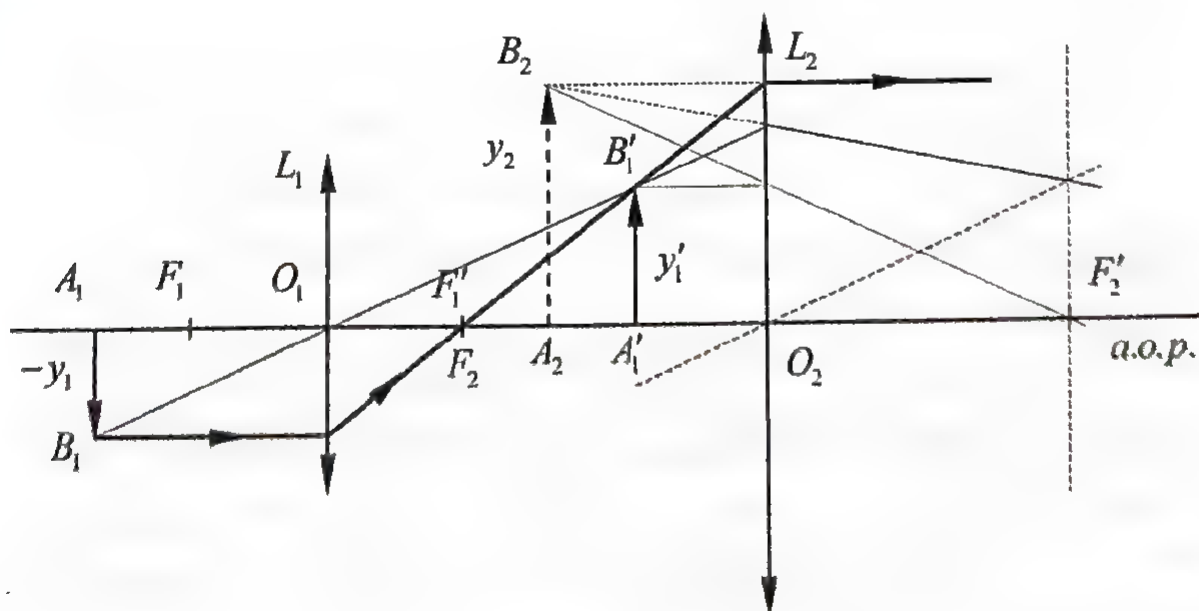


Figura 4.21. Sistem afocal



## 4.5. Aplicații

### Problema nr. 1.

Se consideră că un obiect este situat la  $25\text{ cm}$  în fața unei lentile subțiri având convergența de  $5\text{ dioptrii}$ . Să se stabilească unde se formează imaginea finală a acestui obiect, dacă o a doua lentilă, cu distanța focală de  $25\text{ cm}$ , este plasată la  $40\text{ cm}$  în dreapta primei lentile.

### Rezolvare

- formarea imaginii în prima lentilă se descrie cu ajutorul formulei fundamentale a lentilelor subțiri:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} &= \frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{f_1} &= C_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x_2} = C_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{C_1 x_1 + 1}{x_1}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{C_1 x_1 + 1} = \frac{-25 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot (-25 \cdot 10^{-2}) + 1} = 1\text{ m} = 100\text{ cm} (> 0)$$

- imaginea formată de prima lentilă este reală și se formează în spațiul imagine, situat la dreapta lentilei
- ea devine obiect pentru a doua lentilă
- distanța dintre cele două lentile este de  $40\text{ cm}$ ; se poate scrie:

$$x_2 - x'_1 = d \Rightarrow x'_1 = x_2 - d = 100 - 40 = 60\text{ cm} (> 0)$$

- imaginea finală se formează la distanța  $x'_2$  de a doua lentilă:

$$\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x'_2 = \frac{x'_1 f_2}{x'_1 + f_2} = \frac{60 \cdot 25}{60 + 25} = 17,64\text{ cm} (> 0)$$

deci imaginea finală obținută prin sistemul de lentile este reală

### Observație

1. Imaginile reale pot fi prinse pe un ecran; acest lucru nu este posibil în cazul imaginilor virtuale.

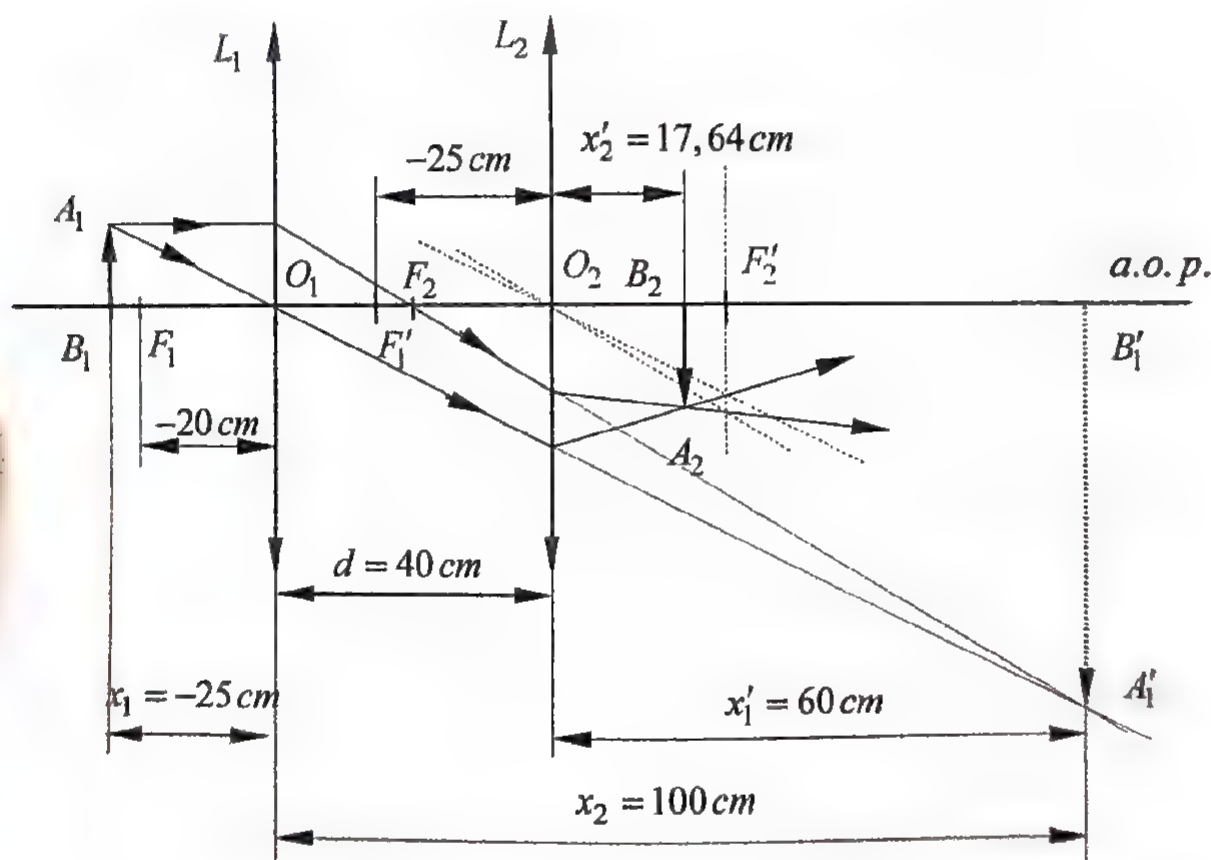
2. Se pot folosi rezultatele obținute la studiul asociațiilor de lentile subțiri:

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{d - x_2} \Rightarrow \frac{1}{x'_2} = \frac{1}{f_2} + C_1 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{d - x_2}$$

$$\frac{1}{x'_2} = \frac{1}{25 \cdot 10^{-2}} + 5 + \frac{1}{-25 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{1} - \frac{1}{40 \cdot 10^{-2} - 1} = 4 + 5 - 4 - 1 + \frac{1}{0,6}$$

$$x'_2 = \frac{3}{17} m = \frac{300}{17} cm = 17,64 cm$$

- mersul razelor de lumină este cel din figura de mai jos:



### Problema nr. 2.

Se consideră un sistem alcătuit dintr-o lentilă subțire, având distanța focală de  $10\text{ cm}$ , situată la distanța de  $25\text{ cm}$  de o a doua lentilă, cu convergența de  $2\text{ dioptrii}$ . În fața sistemului, la distanța de  $30\text{ cm}$  de prima lentilă, se află un obiect înalt de  $2\text{ cm}$ . Să se caracterizeze imaginea formată de sistem.

### Rezolvare

- imaginea formată de prima lentilă joacă rol de imagine intermediară

- ea se formează la distanța  $x_2$  de aceasta:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = \frac{10 \cdot (-30)}{10 - 30} = 15 \text{ cm}$$

- imaginea intermediară este situată la distanța  $x'_1$  de a doua lentilă:

$$d = x_2 + (-x'_1) \Rightarrow x'_1 = x_2 - d = 15 - 25 = -10 \text{ cm} (< 0)$$

deci în fața acesteia

- imaginea finală se formează la distanța  $x'_2$  de a doua lentilă:

$$\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = \frac{50 \cdot (-10)}{50 - 10} = -12,5 \text{ cm} (< 0)$$

- imaginea finală se formează în spațiul obiect al celei de a doua lentile, deci este virtuală

- cunoscând mărimea obiectului, se poate determina mărimea imaginii intermediare:

$$\beta_1 = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow y'_1 = y_1 \frac{x_2}{x_1} = 2 \cdot \frac{15}{-30} = -1 \text{ cm} (< 0)$$

- imaginea este reală (răsturnată), mai mică decât obiectul

- mărirea dată de cea de a doua lentilă este:

$$\beta_2 = \frac{y_2}{y'_1} = \frac{x'_2}{x'_1} \Rightarrow y_2 = y'_1 \frac{x'_2}{x'_1} = -1 \cdot \frac{-12,5}{-10} = -1,25 \text{ cm} (< 0)$$

- mersul razelor de lumină este cel din figură

### Observații

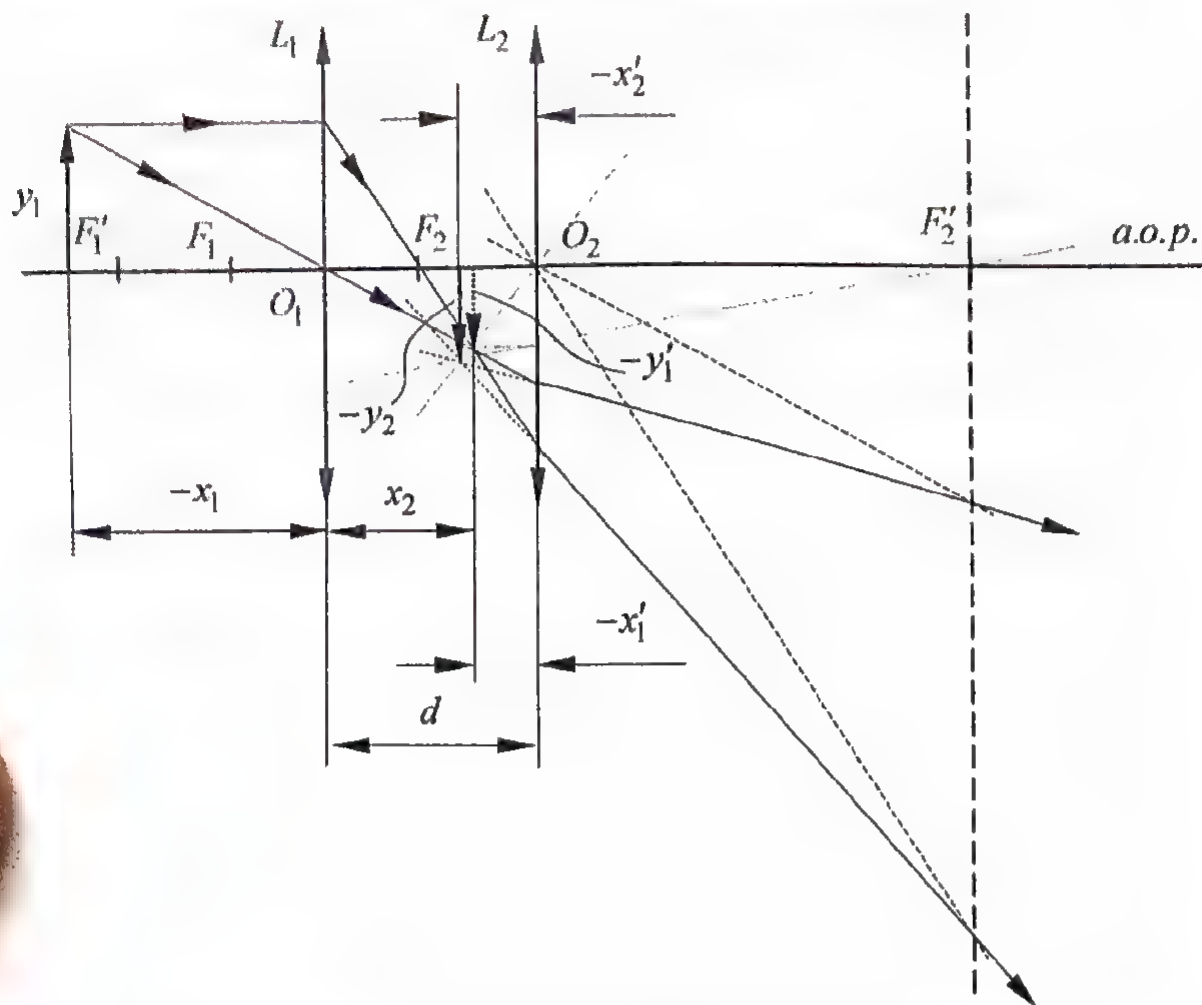
1. Imaginea intermediară joacă rol de obiect pentru cea de a doua lentilă a sistemului; ea este situată în spațiul obiect al lentilei.

Imaginea finală se formează tot în spațiul obiect al celei de a doua lentile, deci este virtuală.

Dacă se determină distanța focală a lentilei:

$$f_2 = \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

rezultă că imaginea intermediară se formează între a doua lentilă și focarul acesteia, deci imaginea finală trebuie să fie virtuală !



2. Se pot folosi rezultatele obținute la studiul asociațiilor de lentile subțiri:

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{d - x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_2'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{d - x_2}$$

de unde, prin înlocuire, se obține:

$$x_2' = -12,5 \text{ cm}$$

3. Mărimea imaginii se putea determina folosind mărirea liniară a sistemului,  $\beta$  :

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \beta_1 \cdot \beta_2 = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_2'}{x_1'} \\ \beta &= \frac{y_2}{y_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_2'}{x_1'} \Rightarrow y_2 = y_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_2'}{x_1'}$$



$$y_2 = 2 \cdot \frac{15}{-30} \cdot \frac{-12,5}{-10} = -1,25 \text{ cm}$$

**Problema nr. 3.**

Să se studieze comportamentul unei lentile sferice biconcave confecționată dintr-un material având indicele de refracție egal cu 1,34, situată într-un mediu având indicele de refracție egal cu 1,6, știind că razele de curbură ale fețelor sale sunt de 20 cm, respectiv 30 cm.

**Rezolvare**

- se studiază semnul distanței focale:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left( \frac{1,34}{1,6} - 1 \right) \left( \frac{1}{-20} - \frac{1}{30} \right) \Rightarrow f = 73,84 \text{ cm} > 0$$

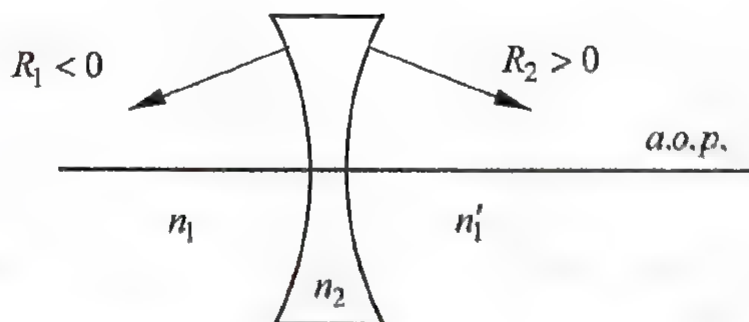
deci lentila va funcționa în mediul respectiv ca un sistem convergent.

**Problema nr. 4.**

Să se studieze în ce condiții o lentilă biconcavă subțire poate forma imagini reale.

**Rezolvare**

Forma geometrică a unei lentile biconcave este cea din figura de mai jos:



De regulă, când se vorbește despre o lentilă biconcavă, aceasta este percepută ca o lentilă divergentă, care formează numai imagini virtuale, deci cerința problemei pare absurdă. Dar, dacă ne gândim mai atent la ceea ce înseamnă o lentilă, vom constata că ea există numai pentru că este un mediu optic transparent cu alte proprietăți optice decât cele ale mediilor (tot optic transparente !) care o mărginesc.

Aceste proprietăți optice sunt cuprinse în indicele de refracție al mediilor respective. Cu alte cuvinte, dacă mediile care mărginesc lentila au același indice de refracție ca și aceasta, noțiunea de lentilă nu ar mai avea sens, lumina s-ar propaga în linie dreaptă, nedeviată, fără să sufere refracțiile pe fețele lentilei.

Se știe că distanța focală a unei lentile sferice subțiri poate fi descrisă cu ajutorul expresiei:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

De cele mai multe ori, se uită care este semnificația corectă a mărimii notate cu „ $n$ ”:

$$n = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = \frac{n_{\text{lentilă}}}{n_{\text{mediu exterior}}}$$

și aceasta în cazul cel mai fericit, când mediul din stânga lentilei are același indice de refracție cu cel din dreapta sa!

Astfel, ceea ce numim „indice de refracție al lentilei” reprezintă, de fapt, raportul dintre indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila și indicele de refracție al mediului care o mărginește; prin urmare,  $n$  este un indice de refracție relativ.

Desigur că, dacă lentila este plasată în aer, lucrurile devin mai simple și se susține denumirea de „indice de refracție al lentilei”, aerul având indicele de refracție foarte apropiat de unitate, motiv pentru care folosim  $n_{\text{aer}} = 1$ .

Ținând cont de cele expuse mai sus, analizând cerința problemei, pentru ca lentila să fie biconcavă și să formeze imagini reale, ea trebuie să prezinte o distanță focală pozitivă:

$$\frac{1}{f} > 0 \Rightarrow (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0$$

Deoarece lentila este biconcavă:

$$\left. \begin{array}{l} R_1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{R_1} < 0 \\ R_2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{R_2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{R_2} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} < 0$$

deci condiția ca ea să formeze imagini reale devine:

$$n - 1 < 0 \Rightarrow n < 1$$

ceea ce pare absurd la prima vedere, pentru că indicele de refracție al unui mediu optic transparent trebuie să fie mai mare decât unitatea, sau măcar egal cu aceasta (și în acest caz vorbim despre aer sau vid!). Aici intervine, însă, semnificația simbolului „ $n$ ”, așa cum a fost ea prezentată înainte:

$$n = \frac{n_{\text{lentilă}}}{n_{\text{mediu}}} < 1 \Rightarrow n_{\text{lentilă}} < n_{\text{mediu}}$$

$$n_2 < n_1$$

deci materialul lentilei trebuie să fie mai puțin dens decât mediul în care este aceasta plasată

### Observații

1. Cazurile comune de utilizare a lentilelor presupun faptul că lentila este situată în aer, deoarece acest lucru. Astfel, când aceasta are formă biconcavă, se consideră implicit că este divergentă, pentru că ea are comportament de sistem optic divergent ! Cu toate acestea, se observă că este util să i se dea atenție și mediului în care este ea amplasată, pentru că și acesta îi influențează comportamentul.

2. Este tentant să spunem că dorim ca lentila biconcavă discutată mai sus să aibă un comportament de lentilă convergentă. Dar ce este o lentilă convergentă și care sunt factorii care îi influențează comportamentul ?

### Problema nr. 5.

Într-o piesă confectionată din sticlă cu indicele de refracție egal cu 1,5 se află o incluziune lichidă, de forma unei lentile sferice biconvexe, având razele de curbură de 20 cm, respectiv 40 cm. Să se determine indicele de refracție al materialului lichid, dacă incluziunea permite formarea de imagini reale ale obiectelor. Cum se comportă incluziunea, dacă lichidul este apa ( $n_{\text{apă}} = \frac{4}{3}$ ) ? Ce s-ar întâmpla dacă ar fi vorba despre o incluziune de aer ?

### Rezolvare

- deoarece incluziunea poate forma imaginea reală a obiectelor, ea se comportă ca un sistem convergent, deci distanța sa focală trebuie să fie pozitivă:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0$$

unde  $n_1$  este indicele de refracție al mediului care mărginește lentila, iar  $n_2$  este indicele de refracție al materialului din care este aceasta confecționată

$$\left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left( \frac{n_2}{1,5} - 1 \right) \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{-40} \right) = \frac{n_2 - 1,5}{1,5} \cdot \frac{2+1}{40} > 0$$

$$n_2 - 1,5 > 0 \Rightarrow n_2 > 1,5$$

- prin urmare, lichidul trebuie să aibă un indice de refracție mai mare de 1,5

- dacă lichidul este apa, situația este următoarea:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left( \frac{\frac{4}{3}}{1,5} - 1 \right) \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{-40} \right) = -\frac{1}{120}$$

$$f = -120 \text{ cm}$$

deci incluziunea de apă, biconvexă, se comportă ca o lentilă divergentă !

- situația este aceeași și dacă ar fi vorba despre o incluziune de aer:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left( \frac{1}{1,5} - 1 \right) \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{-40} \right) = -\frac{1}{40}$$

$$f = -40 \text{ cm}$$

### Observație

„Calitatea” de lentilă sferică convergentă sau divergentă este dată nu numai de aspectul geometric al acesteia, ci și de natura materialului lentilei și a mediului care o mărginește !



## CAPITOLUL 5. INSTRUMENTE OPTICE

Instrumentele optice sunt asociații de sisteme optice cu ajutorul cărora se obțin imagini ale unor obiecte. În funcție de natura imaginii obținute, ele se pot grupa în două mari categorii: cu imagini reale (ochiul, aparatul fotografic, aparatul de proiecție, etc.), respectiv cu imagini virtuale (lupa, microscopul, luneta, etc.)

Caracteristicile principale ale unui astfel de instrument sunt mărirea liniară și cea unghiulară, puterea de separație, respectiv capacitatea de a obține imagini distincte ale unor puncte apropiate, câmpul, adică partea din spațiul obiect ale cărui puncte se observă prin instrument, luminozitatea.

### 5.1. Mărire liniară, grosiment, putere

Orice instrument optic poate fi caracterizat prin câteva mărimi care îi descriu proprietățile: mărirea liniară, grosimentul, puterea.

*Mărirea liniară* caracterizează instrumentul care dă imagini reale ale unui obiect și se definește prin raportul:

$$m = \frac{y_2}{y_1}$$

*Grosimentul* (mărirea unghiulară) caracterizează instrumentele care dau imagini virtuale și se definește ca raportul dintre tangenta unghiului sub care se vede imaginea și tangenta unghiului sub care se vede obiectul privit cu ochiul liber:

$$G = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}$$

*Puterea* unui instrument optic se definește ca tangenta unghiului sub care se vede unitatea de lungime privită prin instrument:

$$P = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{y_1}$$

#### Observație

Dacă obiectul se găsește la distanța minimă de vedere distinctă,  $L$ , unghiul sub care se vede acesta cu ochiul liber este (figura 5.1):

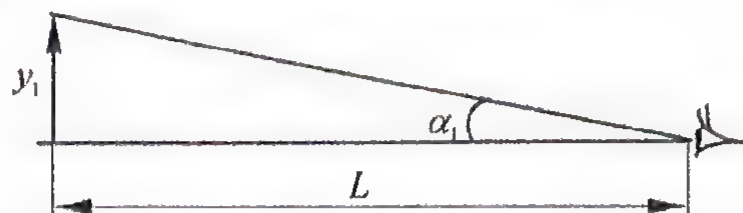


Figura 5.1. Parametrii de observare a unui obiect cu ochiul liber

$$\alpha_1 = \frac{y_1}{L}$$

de unde rezultă:

$$G = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha_2 \frac{L}{y_1} = PL$$

relație care exprimă legătura dintre putere și grosismenț.

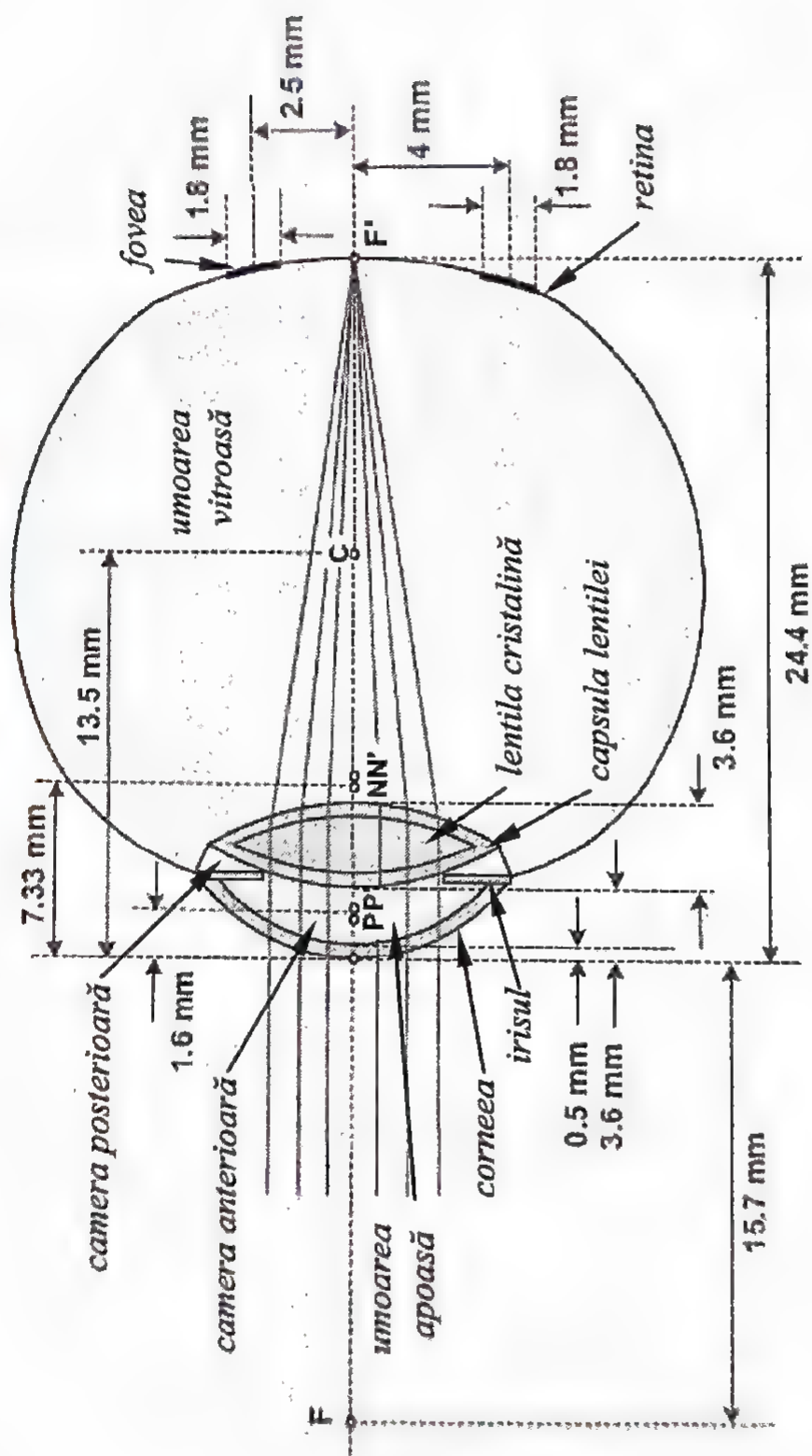
## 5.2. Instrumente optice cu imagine reală

Instrumentele optice cu imagine reală formează o imagine ce poate fi „prinsă” pe un ecran, plasat în planul de convergență al razelor. Acesta poate fi un film fotografic (o placă fotografică) sau însăși retina ochiului, atunci când vederea este directă.

### 5.2.1. Ochiul

Anatomic vorbind, ochiul este un organ complex, servind la transformarea imaginilor geometrice ale corpurilor în senzații vizuale.

Din punctul de vedere al opticii geometrice, el constituie un sistem optic format din trei medii transparente: *umoarea apoasă*, *cristalinul* și *umoarea sticloasă* (*vitroasă*). Acestea se găsesc în interiorul globului ocular, mărginit în exterior de o membrană rezistentă, numită *sclerotică*. Sclerotica este opacă peste tot, exceptând o porțiune din față, transparentă și de formă sferică, numită *corneea transparentă*. Lumina pătrunde în ochi prin corneea, străbate celelalte trei medii transparente și cade pe retină, unde se formează imaginea reală și răsturnată a obiectelor privite. În figura 5.2 sunt precizate detaliile geometriei sale.



**Figura 5.2. Caracteristicile ochiului uman văzut ca sistem optic complex**



Fluxul luminos este reglat automat prin acțiunea involuntară (reflexă) a *irisului*. Acesta este o membrană (ai cărei pigmenți dau culoarea ochilor) perforată în centru de o deschidere circulară, de diametru variabil, numită *pupilă*. La lumină prea intensă, irisul își micșorează pupila pentru a proteja retina, iar la lumină prea slabă, irisul își mărește pupila pentru a mări iluminarea imaginii de pe retină.

*Retina* este o membrană subțire, alcătuită din prelungirile nervului optic și conținând un mare număr de celule senzoriale care percep lumina, numite *conuri* și *bastonașe*.

Conurile sunt celule specializate în perceperea luminii intense din timpul zilei, fiind capabile să dea senzații diferite pentru diferite culori. Bastonașele sunt specializate în perceperea luminii de intensitate slabă, fiind practic incapabile să distingă culorile. Ochiul omenesc conține aproximativ 7 milioane de conuri și 130 de milioane de bastonașe, foarte neuniform răspândite. Conurile ocupă mai ales partea centrală a retinei, în timp ce densitatea bastonașelor crește spre periferie.

În partea centrală, puțin mai sus de axa optică, există o regiune numită *pata galbenă* (macula lutea) în mijlocul căreia se află o mică adâncitură – *foveea centralis* – populată excesiv de conuri, în număr de 13000-15000. Sub acțiunea involuntară a unor mușchi speciali ai ochiului, globul ocular suferă mișcări de rotație în orbita sa, astfel încât imaginea sa să se formeze întotdeauna în regiunea petei galbene, cea mai importantă regiune fotosensibilă a ochiului. Pe pata galbenă avem un număr maxim de conuri pe unitatea de suprafață. În jurul punctului de intrare al nervului optic în globul ocular, nu se găsesc nici conuri, nici bastonașe. Bastonașele sunt mai sensibile la lumină decât conurile. În schimb, conurile sunt sensibile la lungimea de undă. De aceea la crepuscul (iluminare inferioară valorii de  $0,01 \text{ lux}$ ), nu se văd imagini colorate, acestea începând să fie percepute numai de la iluminări superioare unui  $\text{lux}$ . La iluminări superioare valorii de  $10^2 - 10^3 \text{ lux}$ , vizibilitatea este asigurată exclusiv de conuri. Conurile și bastonașele conțin *iodopsină* și *rodopsină* care se modifică fotochimic sub acțiunea luminii, energia astfel eliberată excitând nervul optic de care este legată celula și astfel impulsul nervos se transmite la creier.

Cristalinul are forma unei lentile nesimetric biconvexe și poate fi mai bombat sau mai puțin bombat sub acțiunea reflexă a mușchilor ciliari, modificându-și astfel convergența, încât imaginea să cadă pe



retină. El are o structură stratificată, prezentând spre margine indicele de refracție de aproximativ 1,38, iar în interior de aproximativ 1,41.

### 5.2.1.1. Aspecte generale

Modelul ochiului sferic are limitările sale.

Lumina pătrunde în ochi prin corneea, care este un strat transparent având grosimea de 0,5 mm și indicele de refracție egal cu 1,377. Apoi, trece prin camera anterioară, care are un indice de refracție mai mic, de 1,336. Grosimea aceste părți frontale apoase este de 3,04 mm și se termină la planul irisului și al lentilei ochiului.

Lentila ochiului are o formă variabilă și își modifică puterea refractivă (convergența), astfel încât ochiul se poate acomoda la un obiect aflat la o anumită distanță. Lentila ochiului este alcătuită din mai multe straturi, dar, într-o primă aproximație, nu prezintă interes decât un singur mediu optic, în vreme ce modele mai amănunțite iau în considerare o lentilă nucleu cristalină și o capsulă care înglobează această lentilă.

În spatele lentilei, lumina trece prin umoarea vitroasă și este receptată de către retină, unde are loc detectarea luminii.

În tabelul 5.1, corelat cu figura 5.2, pot fi urmărite cele mai importante date optice privind ochiul uman; se face distincție între ochiul relaxat, pentru obiecte situate la infinit și cel acomodat (stare de focalizare).

Aproximativ două treimi din puterea refractivă a ochiului uman este localizată în suprafața frontală a corneei, care prezintă o diferență de indice de refracție de 0,377 față de aer în partea frontală, iar o treime este localizată în lentila cristalinului, care prezintă doar o diferență de 0,08 față de camera vitroasă și umoarea vitroasă.

Dacă se plasează ochiul în apă, având indicele de refracție  $4/3$ , indicele de refracție relativ al corneei față de mediul înconjurător se reduce de 7 ori. Din acest motiv, imaginea se formează departe de retină și apare încețoșată.

Corneea contribuie cel mai mult la puterea refractivă a ochiului. Forma sa asferică în zona exterioară contribuie la reducerea aberațiilor unei pupile cu un diametru mare.

Tabelul 5.1. Parametrii optici principali ai ochiului uman

Nr. crt.	Proprietăți	Ochi relaxat	Ochi acomodat
1	Putere refractivă (convergență)	58,63 dioptrii	70,57 dioptrii
2	Distanță focală în aer	17,1 mm	14,2 mm
3	Putere refractivă a lentilei cristalinului	19 dioptrii	33 dioptrii
4	Câmp vizual - maxim	108°	
5	Câmp vizual - fovea	5°	
6	Diametrul pupilei	2 - 8 mm	
7	Diametrul globului ocular	24 mm	
8	Distanța de la vertexul frontal la punctul nodal $N$	7,33 mm	
9	Distanța de la vertexul frontal la punctul principal $P$	1,6 mm	
10	Distanța de la vertexul frontal la pupila de intrare	3,0 mm	

### Acomodarea

Un ochi normal, aflat în stare de repaus, are focarul situat pe retină (figura 5.3). Din această cauză, pentru obiectele situate la infinit (practic, la distanțe mai mari decât cca. 15 m) ochiul formează imaginile pe retină fără nici un efort de modificare a convergenței cristalinului.

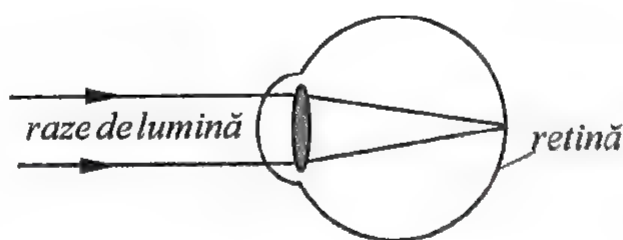


Figura 5.3. Formarea imaginii pe retina ochiului emetrop

Apropiind obiectul, cristalinul se bombează sub acțiunea mușchilor ciliari, astfel încât imaginea să rămână tot pe retină. Fenomenul se numește *acomodare*.

Acomodarea ochiului se definește ca procesul de adaptare a lentilei-cristalin, pentru a forma pe lentilă imaginile obiectelor situate la

diferite distanțe față de ochi. Pe măsură ce obiectul se apropie de ochi, cristalinul se bombează tot mai tare, iar distanța sa focală scade.

Cristalinul însă nu se poate bomba oricât și de aceea obiectul poate fi adus doar până la o anumită distanță minimă – distanța minimă de vedere – sub care ochiul nu mai poate forma imaginea pe retină. Acomodarea ochiului este deci posibilă între un punct aflat la o distanță maximă (*punctum remotum*), care pentru ochiul normal este la infinit (practic, peste 15 m) și un punct aflat la o distanță minimă (*punctum proximum*), care pentru ochiul normal este de 10-15 cm la tineri și aproximativ 25 cm la adulți. Intervalul dintre cele două puncte se numește *câmp de acomodare*.

Se definește *puterea de acomodare* a cristalinului ca fiind diferența dintre puterea maximă și cea minimă a lentilei-cristalinului; prin urmare, ea reprezintă variația maximă a puterii lentilei cristalinului.

Puterea de acomodare a cristalinului se măsoară în dioptrii ( $m^{-1}$ ).

În mod normal, ochiul vede cel mai bine, putând distinge cele mai multe detalii, la o distanță mai mare decât distanța minimă de vedere și anume 25 cm, numită și *distanța vederii optime*.

Două puncte luminoase sunt văzute distinct dacă distanța lor unghiulară este superioară unei anumite limite. S-a constatat că limita aceasta pentru un ochi normal este de un minut de arc, ceea ce corespunde pe retină formării imaginii punctelor pe două conuri alăturate.

Acomodarea se exprimă prin *amplitudinea dioptrică a câmpului de vedere*, numită și *amplitudine de acomodare a ochiului*,  $A$ :

$$A = \frac{1}{s_m} - \frac{1}{s_M}$$

unde  $s_m$  este distanța la care se află punctum proximum față de vârful corneei (exprimată în m), iar  $s_M$  este distanța la care se află punctum remotum față de vârful corneei (exprimat în m).

Amplitudinea de acomodare scade odată cu înaintarea în vârstă, punctum proximum se îndepărtează tot mai mult, iar ochiul devine *prezbit*.

### Adaptarea ochiului

Ochiul omului poate percepe fluxuri luminoase cuprinse într-un interval foarte larg: raportul dintre intensitatea luminoasă maximă (în



prag de durere) și intensitatea luminoasă minimă ce poate fi percepută este de ordinul  $10^6$ . Pentru a putea percepe lumină în tot acest interval, fără leziuni ale sistemului nervos, au loc procese mecanice și fiziologice de adaptare.

În cazul adaptării mecanice, diametrul irisului se schimbă aproape spontan (câteva secunde). Diametrul pupilei în cazul ochiului tânăr variază între 2,5 și 8 mm, dar o dată cu înaintarea în vârstă, diametrul maxim scade. Din această cauză, ochiul devine mai puțin sensibil la intensități luminoase mai mici.

Pe lângă adaptarea mecanică, are loc și o adaptare fiziologică (prin schimbarea sensibilității ochiului), ce decurge mult mai lent decât cea mecanică.

### **Sensibilitatea la culori**

Teoria observării culorilor a lui Young-Helmholtz pornește de la faptul experimental că orice culoare poate fi obținută din amestecul culorilor fundamentale, roșu, verde și albastru. Pe baza acestei observații s-a postulat că există trei tipuri de receptori (conuri) de sensibilitate spectrală diferită corespunzătoare celor trei tipuri de culori. Prin amestecarea semnalelor venite de la acești receptori se percepe în final, psihologic, orice culoare.

Sensibilitatea ochiului la diferite lungimi de undă este caracterizată prin *curba de sensibilitate*. Maximul se obține pentru culoarea galben-verde de aproximativ 5550 Å în vederea diurnă și 5100 Å în vederea crepusculară. Efectul de deplasare a maximelor în funcție de iluminare se numește *efect Purkinje*. Domeniul undelor electromagnetice pentru care ochiul este sensibil și, deci, constituie domeniul vizibil, este cuprins între 4000 Å și 7600 Å. Se observă de asemenea că vizibilitatea variază mult cu lungimea de undă.

Când se trece de la lumină la întuneric, sensibilitatea ochiului este mică. După câteva minute, ca efect al adaptării conurilor, respectiv bastonașelor, ea crește cam de  $10^3 - 10^4$  ori.

Deoarece sensibilitatea în cazul vederii diurne este mare la lumina verde, se obișnuiește să se folosească acest tip de lumină în cazul observațiilor îndelungate ce utilizează anumite aparate de măsurat.



### **Puterea de separare a ochiului**

Se numește *putere de separare* unghiul cel mai mic format de razele vizuale care vin de la două puncte, astfel încât acestea să se vadă distinct.

Puterea de separare a ochiului depinde de obiectul privit, luminozitate, contrast față de fond și forma ochiului.

Deoarece puterea de separare este influențată de forma obiectului, se utilizează drept formă unitară *inelele Landolt* (figura 5.4).



Figura 5.4. Inel Landolt

Un inel Landolt are o întrerupere de lățime egală cu grosimea inelului. Aceste inele se desenează de obicei pe panouri, porțiunea de întrerupere ocupând diverse poziții pe inel. De asemenea, pe panou se pun inele de diverse mărimi, recunoașterea directă a porțiunii de întrerupere ajutând la aproximarea corectă a puterii de separare a ochiului.

Deoarece puterea de separare depinde de luminozitate, contrast și forma obiectului, dar și de ochiul respectiv, se adoptă ca putere de separare etalon cea care corespunde unui unghi de 1 *min* (de arc).

### **Senzația de relief**

Senzația de relief percepută de om se datorează faptului că atunci când se privește un obiect, axele vizuale ale ochilor sunt îndreptate instinctiv spre obiect, astfel încât în fiecare ochi imaginea se formează pe pata galbenă corespunzătoare. Imaginile, datorită poziției diferite a ochilor față de obiect, sunt distincte, însă cele două impresii contopindu-se în creier, senzația este unică. La observarea unui obiect se realizează două acomodări distincte și anume: a unghiului între cele două axe vizuale, respectiv a convergenței cristalinelor.

Amândouă informează observatorul asupra poziției și caracteristicilor spațiale ale obiectului. Senzația de relief este datorată faptului că cele două imagini nu sunt identice.

### 5.2.1.2. Deficiențe de convergență a ochiului

#### Ochiul miop

Ochiul miop este mai alungit decât ochiul normal, astfel încât focarul său se află în fața retinei; imaginile obiectelor îndepărtate (situate la infinit) nu se formează pe retină, ci în fața ei (figura 5.5). Prin bombarea cristalinului situația nu se îmbunătățește, deoarece aceste imagini nu se duc pe retină, ci se îndepărtează de ea.

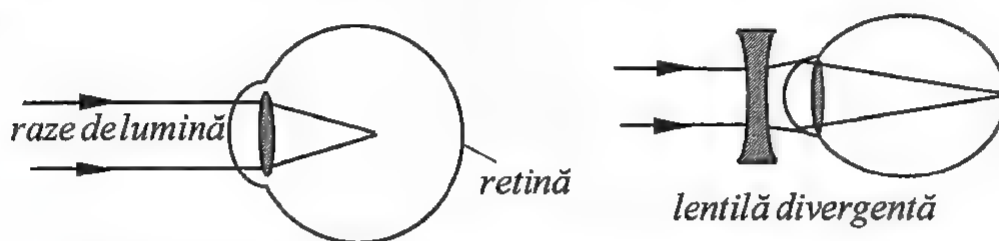


Figura 5.5. Formarea imaginii în ochiul miop și corectarea deficienței

Obiectul trebuie apropiat până la o anumită distanță (în funcție de gradul de miopie) pentru ca imaginea să se formeze pe retină cu ochiul neacomodat. Apropiind mai mult obiectul, ochiul poate păstra, prin acomodare, imaginea pe retină, până la o distanță minimă de cca. 5 cm. Ochiul miop are așadar atât punctum remotum, cât și cel proximum mai apropiate decât ochiul normal. El nu poate vedea clar obiecte mai îndepărtate decât punctul său remotum. Defectul se corectează cu *lentile divergente*, al căror focar se află în punctul remotum al ochiului miop.

#### Ochiul hipermetrop

Ochiul hipermetrop este mai „turtit” decât ochiul normal, astfel încât focarul său se află în spatele retinei (figura 5.6).

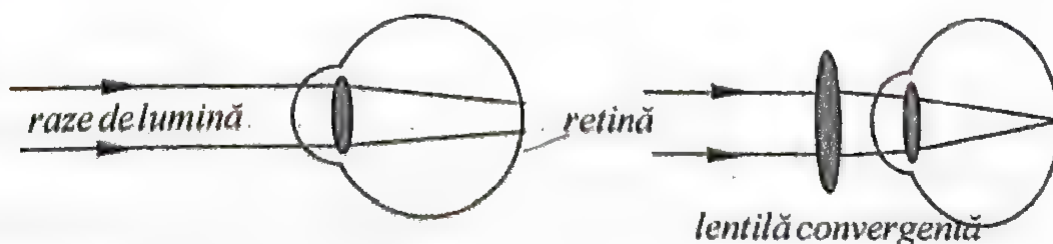


Figura 5.6. Formarea imaginii în ochiul hipermetrop și corectarea deficienței

În starea relaxată a ochiului hipermetrop, imaginile obiectelor de la infinit nu se formează pe retină, ci în spatele ei, deci nici acest ochi nu vede clar obiectele de la infinit. Spre deosebire de cele miop, însă, el poate, prin acomodare (bombarea cristalinului), să aducă imaginea pe retină. Distanța minimă până la care poate vedea (acomodat) este însă mai mare decât la ochiul normal. Așadar, hipermetropul poate vedea clar obiectele mai îndepărtate numai cu efort de acomodare, iar obiectele mai apropiate, care intră în limitele de acomodare ale unui ochi normal, nu le poate distinge clar.

Folosind ochelari cu *lentile convergente*, imaginea poate fi adusă pe retină atât pentru obiectele îndepărtate, privind neacomodat, cât și pentru obiecte apropiate, privind acomodat.

### Ochiul prezbit

Ochiul prezbit este ochiul oamenilor în vârstă și se datorează slăbirii cu timpul a capacității de bombare a cristalinului; un astfel de ochi va avea punctul proximum mai îndepărtat decât la un ochi normal. Obiectele mai apropiate vor avea deci imaginile în spatele retinei și pentru aducerea lor pe retină se folosesc *lentile convergente*, care măresc convergența ochiului, ca și în cazul ochiului hipermetrop.

### 5.2.2. Aparatul fotografic

Aparatul fotografic este un instrument optic cu imagini reale, imaginea formându-se prin intermediul obiectivului în planul imagine, unde se află filmul fotografic (figura 5.7).

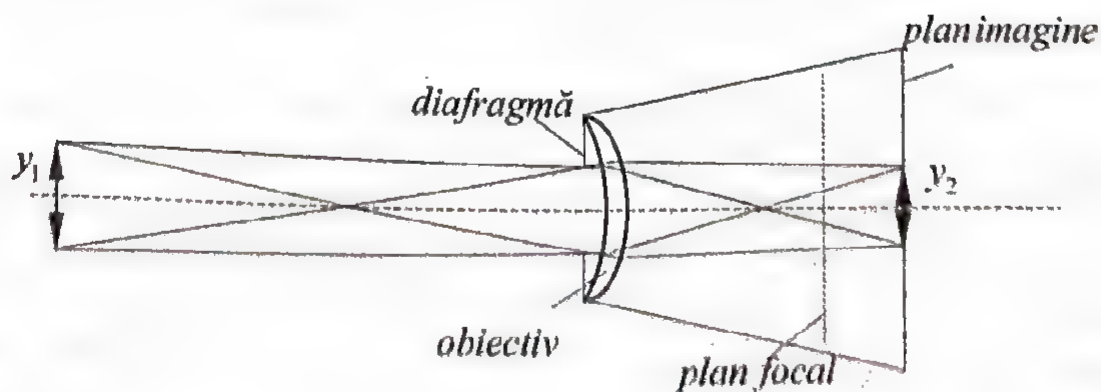


Figura 5.7. Schema de principiu a formării imaginii printr-un sistem optic convergent



### 5.2.2.1. Mărimi caracteristice. Profunzimea de câmp în spațiul obiect

Obiectivul aparatului fotografic este caracterizat prin *distanță focală* și *deschidere relativă*.

*Deschiderea relativă* este definită prin raportul:

$$d = \frac{2h}{f}$$

unde  $h$  este raza diafragmei, iar  $f$  reprezintă distanța focală.

Pe un format fix al imaginii, care depinde de aparatul fotografic, se vor obține imagini din câmpul obiect mai mari sau mai mici, în funcție de distanța focală a obiectivului. Cu cât distanța focală a obiectivului este mai mare, pe aceeași suprafață, se obțin imagini dintr-o regiune mai mică de spațiu. Rezultă că imaginile vor fi, de fapt, mărite față de cele obținute cu un obiectiv de distanță focală mică, deoarece cu un obiectiv de distanță focală mică, pe aceeași suprafață, se fotografiază o regiune mai întinsă, care conține și imaginile obținute anterior, dar la o scară mult mai redusă (figura 5.8).

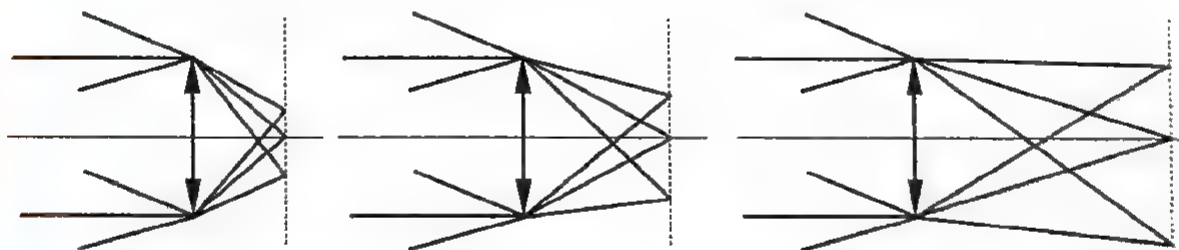


Figura 5.8. Formarea imaginii în aparatul de fotografiat în funcție de distanța focală a obiectivului

Pentru un obiect situat la o distanță mai mică de obiectiv, planul imagine nu mai coincide cu planul focal al obiectivului.

Pentru obiectivul cu distanța focală mai mică, deschiderea unghiulară este maximă, deci câmpul din spațiul fotografiat pe aceeași dimensiune a fotografiei este maxim. Pentru obiectivul de distanță focală mai mare, câmpul unghiular este mai mic și pe același format al fotografiei se obțin imagini mai puține, dar mai mari.

Obținerea unei fotografii clare a unui spațiu în profunzime se bazează pe acuitatea vizuală a observatorului, care este de 1 *minut* de arc. Rezultă că o pată se reduce la un punct atunci când este văzută sub



un unghi mai mic sau egal cu un minut de arc. Acest unghi depinde de distanța de la care se privește, dar, dacă se consideră că distanța este cea minimă de vedere clară, dimensiunea petei care se vede sub un minut de arc este de aproximativ  $0,1 \text{ mm}$ .

Fie situația din figura 5.9:

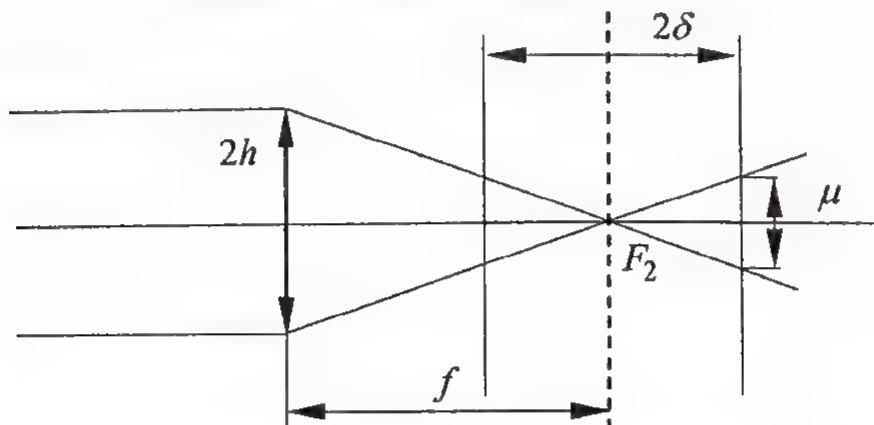


Figura 5.9. Distanța de profunzime. Formarea imaginii clare a unui obiect situat la infinit

Obiectul fiind situat la infinit, planul focal coincide cu planul imagine.

Pe o distanță  $\delta$  în fața și în spatele planului imagine se vor vedea petele ca și puncte. Distanța  $\delta$  poartă numele de *distanță de profunzime* (dă profunzimea de câmp în spațiul imagine); oriunde se plasează filmul fotografic în interiorul acestei regiuni, pe acesta se va observa o imagine clară.

Conform figurii 5.9 se formează două triunghiuri asemenea; scriind raportul de asemănare, rezultă:

$$\frac{\mu}{2h} = \frac{\delta}{f} \Rightarrow \delta = f \frac{\mu}{2h} = \frac{\mu}{\frac{2h}{f}}$$

Mărimea  $\delta$  reprezintă profunzimea de focar; se observă că ea crește odată cu scăderea deschiderii relative, adică cu scăderea razei diafragmei și cu creșterea distanței focale.

Fie situația în care obiectul se găsește la o distanță finită,  $x_1$  (figura 5.10). Se disting două triunghiuri asemenea; raportul de asemănare este:

$$\frac{\delta}{f + x_2} = \frac{\mu}{2h} \Rightarrow \delta = \frac{\mu(f + x_2)}{2h} \left( = \frac{\mu}{\frac{2h}{f + x_2}} \right)$$

valoarea lui  $\delta$  fiind mai mare decât pentru obiectul situat la infinit.

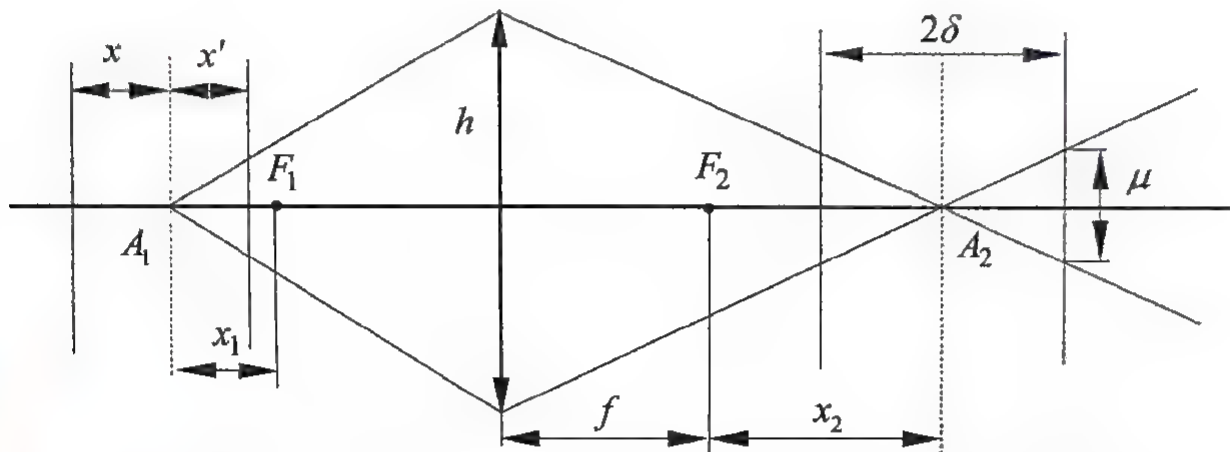


Figura 5.10. Distanța de profunzime. Formarea imaginii clare a unui obiect situat la distanță finită

Faptul că în spațiul imagine există regiunea  $2\delta$  în care imaginea pare clară, face ca și în spațiul obiect să existe o regiune în care toate obiectele vor avea imagine clară pe placa fotografică.

În cele ce urmează, se dorește calculul întinderii acestei regiuni în fața și în spatele planului obiect pentru care este pus la punct aparatul fotografic. Conform formulei lui Newton:

$$\begin{cases} (x + x_1)(x_2 - \delta) = f^2 \\ (x_1 - x')(x_2 + \delta) = f^2 \end{cases}$$

a) se folosește prima relație,  $(x + x_1)(x_2 - \delta) = f^2$

$$\underbrace{x_1 x_2}_{=f^2} - x_1 \delta + x x_2 - x \delta = f^2$$

$$x(x_2 - \delta) = x_1 \delta \Rightarrow x = \frac{x_1 \delta}{x_2 - \delta} = \frac{x_1 \mu (x_1 + f)}{2hf - \mu(x_1 + f)}$$

b) se folosește a doua relație,  $(x_1 - x')(x_2 + \delta) = f^2$

$$\underbrace{x_1 x_2}_{=f^2} + x_1 \delta - x' x_2 - x' \delta = f^2$$

$$x'(x_2 + \delta) = x_1 \delta \Rightarrow x' = \frac{x_1 \delta}{x_2 + \delta} = \frac{x_1 \mu (x_1 + f)}{2hf + \mu(x_1 + f)}$$

Dacă se ține cont că în majoritatea cazurilor  $f$  (de ordinul centimetrilor) este neglijabil în sume față de  $x_1$  (de ordinul metrilor), rezultă:

$$x = \frac{x_1^2 \mu}{2hf - \mu x_1}$$

respectiv:

$$x' = \frac{x_1^2 \mu}{2hf + \mu x_1}$$

de unde rezultă că dacă  $h$  și  $f$  scad, profunzimea de câmp în spațiul obiect crește.

#### 5.2.2.2. Formarea imaginii fotografice. Profunzimea câmpului imaginii

O mică porțiune  $P$  de pe suprafața unui obiect (asimilabilă cu un punct) reflectă difuz o parte din lumina venită de la Soare sau de la o sursă artificială (figura 5.11).

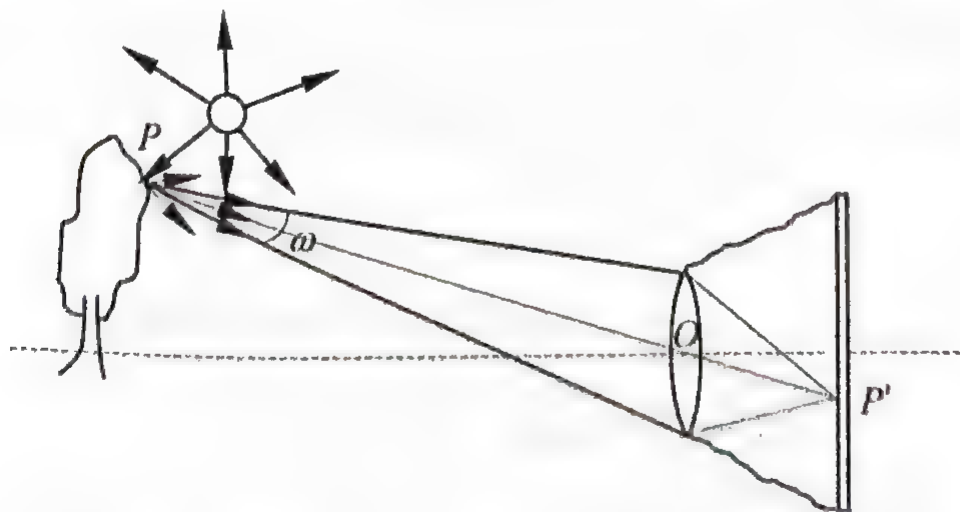


Figura 5.11. Formarea imaginii fotografice a unui obiect punctiform

O parte din lumină (cuprinsă în unghiul solid  $\omega$ ) cade pe suprafața lentilei. Neglijând unele mici pierderi datorate reflexiei și absorbției de către lentilă, lumina care cade pe lentilă este focalizată pe pelicula fotografică, formând o mică pată aproape punctiformă  $P'$  acolo unde apare o concentrare de energie luminoasă. Toate celelalte puncte ale obiectului, aflate în câmpul aparatului, vor da imagini sub forma unor pete punctiforme, mai mult sau mai puțin luminoase, după cum porțiunile corespunzătoare de pe obiect primesc și reflectă mai multă sau mai puțină lumină în direcția aparatului.

Deoarece toate aceste imagini se găsesc pe drepte care unesc punctele respective cu centrul optic  $O$ , rezultă că imaginea obținută reprezintă o *proiecție centrică a obiectului*. Se spune că imaginea este *ortoscopică* (figura 5.12).

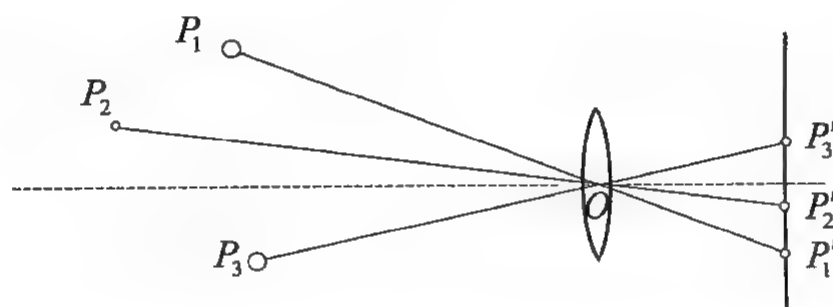


Figura 5.12. Formarea imaginii ortoscopice prin lentilă

Dacă placa fotografică este plasată mai aproape sau mai departe de lentilă decât planul în care sunt focalizate diferite imagini ale punctelor ce constituie obiectul, pe placă vor apărea nu pete punctiforme, ci pete circulare cu un diametru apreciabil (figura 5.13).

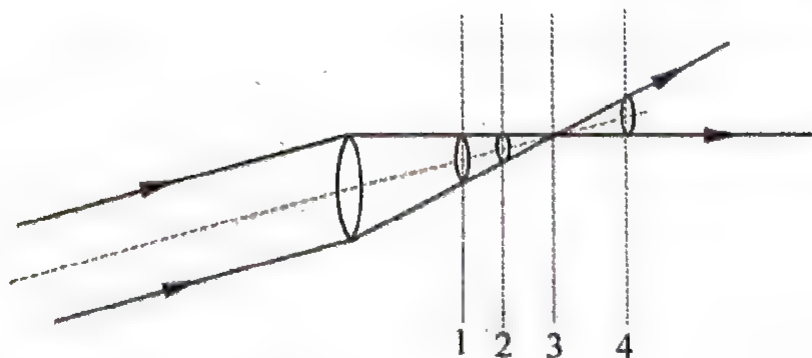


Figura 5.13. Formarea petelor difuze (1)



Cu cât este mai mic diametrul petelor în planul imaginii, cu atât va fi mai clară fotografia și mai bogată în detalii, deci va avea o rezoluție mai bună.

Imaginea este mai clară dacă placa fotografică se plasează în planul conjugat imagine. Deoarece poziția acestuia se modifică o dată cu distanța la planul conjugat obiect, este necesar ca distanța obiectiv-placă fotografică să poată fi variată între anumite limite, pentru operația de *punere la punct* a distanței.

### Profundimea câmpului imaginii

Imaginea unor puncte situate într-un plan obiect  $\pi$  se formează într-un plan imagine  $\pi'$ , conjugat cu primul și care este situat la o distanță cu atât mai mare de planul principal al lentilei, cu cât planul obiect este mai apropiat de aparat (figura 5.14).

Punctele  $P_1, P_2, P_3$  cuprinse în planele obiect  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  vor da imaginile  $P'_1, P'_2, P'_3$  cuprinse în planele imagine conjugate  $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3$ . Materialul fotosensibil nu poate ocupa decât cel mult unul din aceste plane; astfel, numai punctele situate în planul conjugat obiect corespunzător planului imagine pe care îl ocupă pelicula vor da imagini de claritate maximă.

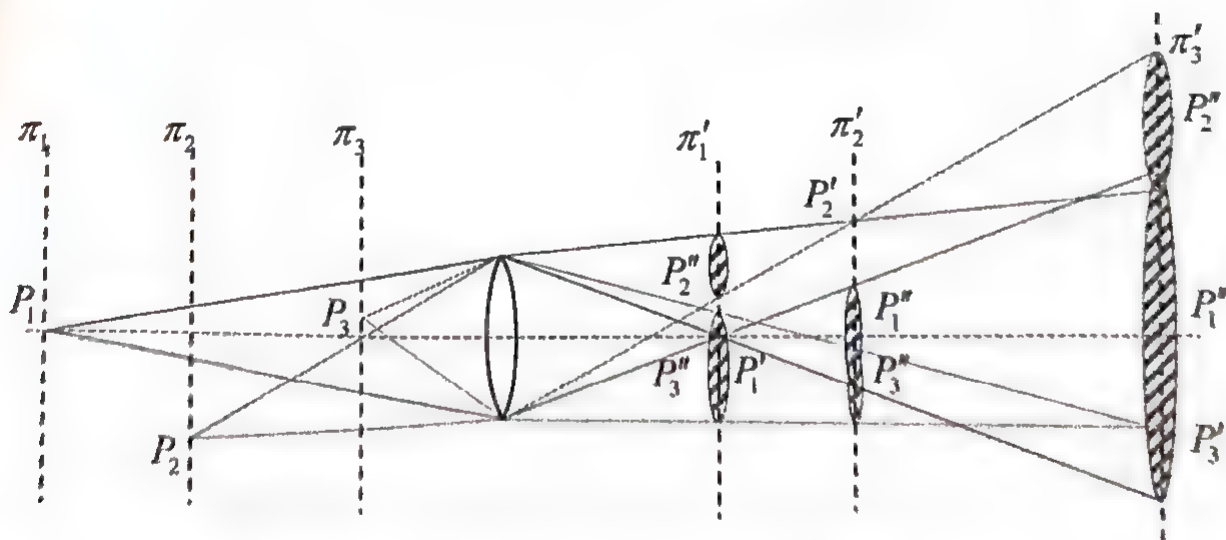


Figura 5.14. Formarea petelor difuze (2)

Pentru un subiect ale cărui detalii nu sunt într-un singur plan, ci ocupă mai multe plane diferite, nu se poate obține o imagine clară a tuturor detaliilor, decât dacă acestea se află la distanțe foarte mari de

aparat (obiectele foarte îndepărtate, indiferent de distanță, formează imaginea în planul focal imagine).

Deoarece ochiul omenesc are o rezoluție limitată, se admite o anumită valoare limită pentru diametrul  $d$  al petelor difuze.

Dacă petele difuze ce rezultă pentru punctele din subiect nepuse riguros la punct sunt suficient de mici pentru ca chiar mărirea apreciabilă a unui negativ de format mic să nu depășească în diametru puterea de separație a ochiului, imaginea formată în realitate din cerculețe cu diametrul la limita admisibilă va apărea ca perfect clară.

Astfel, deplasând pelicula fotografică într-o poziție intermediară, se poate ajunge în situația în care toate punctele sunt redată prin pete de difuziune de diametru acceptabil de mic.

Figura 5.15 ilustrează ceea ce se înțelege prin *profundzime de câmp*: intervalul dintre planele  $\pi_2$  și  $\pi_3$  pentru care diametrele  $d_2$  și  $d_3$  ale petelor difuze nu depășesc limita admisă.

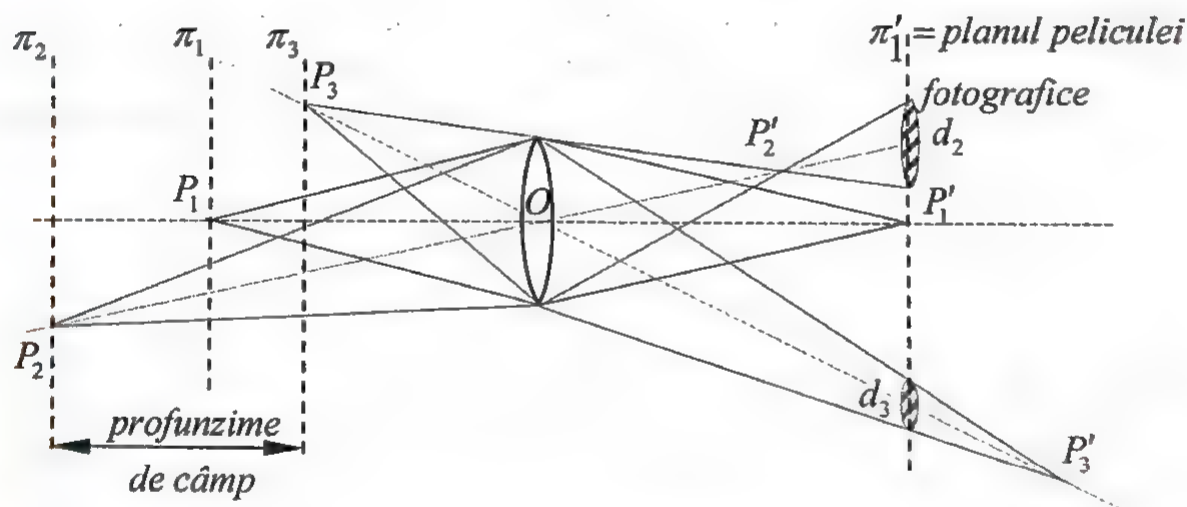


Figura 5.15. Petele difuze de mărime acceptabilă vor fi percepute ca imagine clară

### 5.3. Instrumente optice cu imagine virtuală

Imaginea formată de un astfel de instrument optic nu poate fi prinsă pe un ecran; ea este virtuală și se formează în interiorul instrumentului, în punctul în care se întâlnesc prelungirile razelor emergente.

### 5.3.1. Lupa

Lupa este un sistem convergent cu ajutorul căruia se obține o imagine mărită a unui obiect plasat în apropierea sistemului, între focar și lentilă. Se obține astfel o imagine virtuală, dreaptă și mărită a obiectului (figura 5.16).

Observatorul deplasează lupa între obiect și ochi, astfel încât imaginea să se formeze între punctul de distanță optimă de vedere clară și punctul unde nu mai este nevoie ca ochiul să producă acomodarea (adică punctul de la infinit). Această deplasare constituie *punerea la punct a lupei*.

Puterea lupei este:

$$P = \frac{\text{diametrul aparent al imaginii}}{\text{înălțimea obiectului}} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{tg\alpha_2}{y_1} = \frac{y_1}{f} = \frac{1}{f}$$

deci puterea lupei este numeric egală cu convergența lentilei.

Conform definiției, *grosimentul* lupei (mărirea unghiulară) se calculează ca:

$$G = \frac{\text{diametrul aparent al imaginii (obiectului privit prin lupă)}}{\text{diametrul aparent al obiectului privit liber}} = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}$$

În mod normal, obiectul  $y_1$ , privit liber, se află la distanța minimă de vedere clară,  $\delta$ :

$$tg\alpha_1 = \frac{y_1}{\delta}$$

de unde rezultă

$$G = \delta \frac{tg\alpha_2}{y_1} = \delta P = \frac{\delta}{f}$$

relație ce arată că o mărire unghiulară mare apare pentru o distanță focală mică

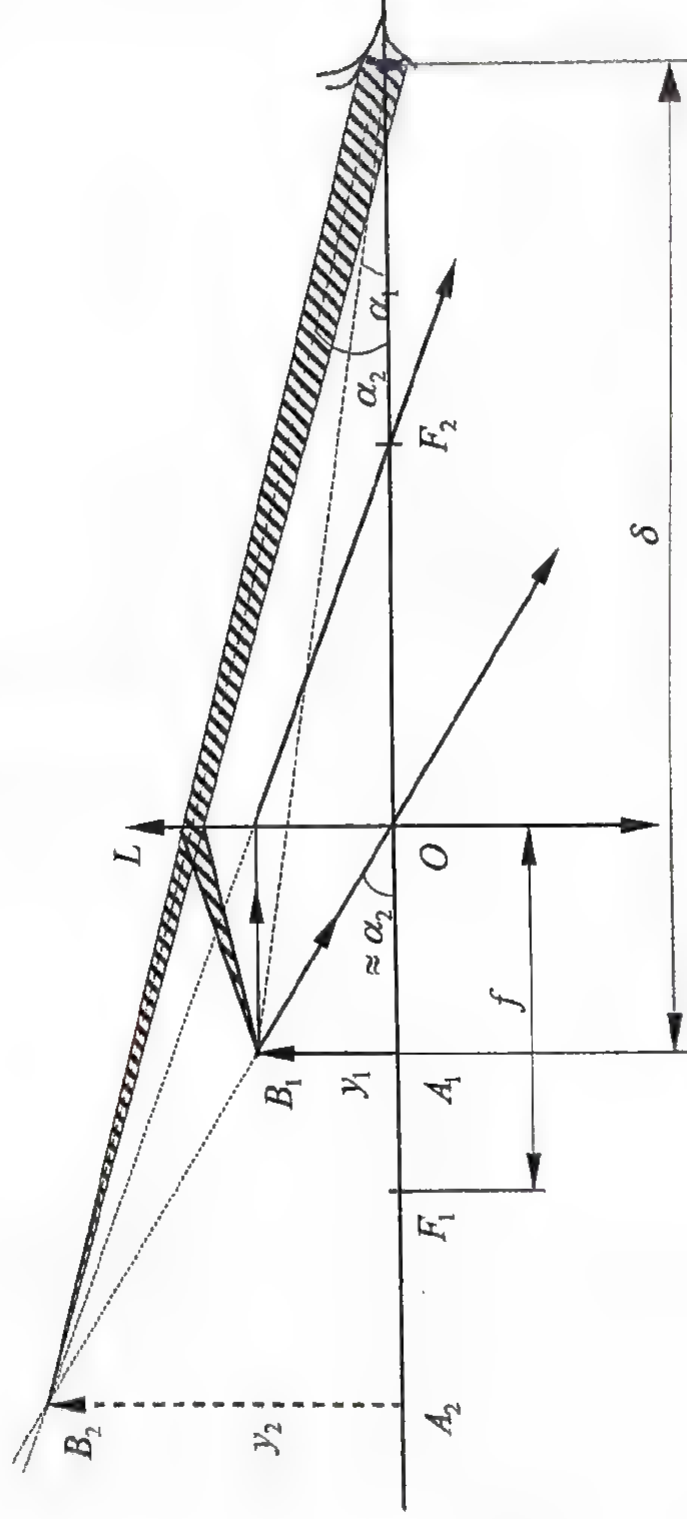


Figura 5.16. Formarea imaginii într-o lupă



**Observație**

1. Dacă ochiul este relaxat, el vede obiectul la distanța optimă de vedere clară,  $\delta$ , sub unghiul  $\alpha_1$  (figura 5.17.a). Obiectul se aduce cât mai aproape de focarul lentilei, situându-se între lentilă și focar; se obține astfel o imagine virtuală și mărită a acestuia,  $y_2$ , care se privește neacomodat sub unghiul  $\alpha_2$  (figura 5.17.b, linia continuă). Astfel:

$$G = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\frac{y_1}{\delta}}{\frac{y_2}{f}} = \frac{f}{\delta}$$

relație cunoscută deja.

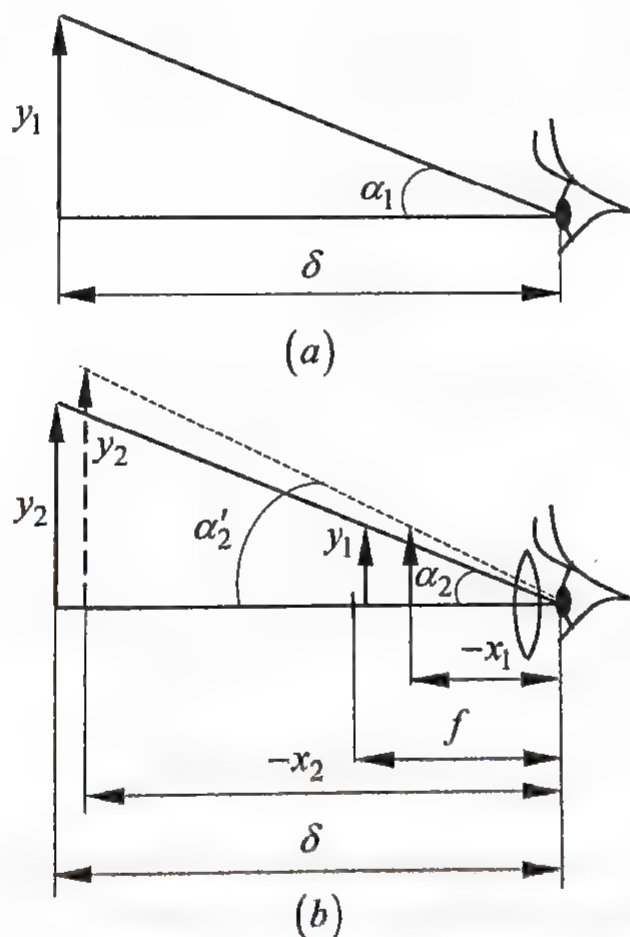


Figura 5.17. Reprezentare simplificată a observării imaginii într-o lupă: (a) ochi relaxat; (b) ochi acomodat – linia întreruptă

Dacă, însă, se folosește acomodarea când se privește prin lupă, situația este cea din figura 5.17.b (linia întreruptă). Grosimentul devine:

$$G' = \frac{\operatorname{tg} \alpha'_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\frac{y_1}{-x_1}}{\frac{y_1}{\delta}} = \frac{\delta}{-x_1}$$

Distanța  $x_1$  se determină din ecuația punctelor conjugate:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - f}{x_2 f}$$

iar grosimentul devine:

$$G' = \delta \frac{x_2 - f}{x_2 f} = 25 \frac{-25 - f}{-25 \cdot f} = \frac{25}{f} + 1$$

Cu toate că această valoare a grosimentului este mai mare decât cea obținută fără acomodatie, în al doilea caz, ochiului îi este mai ușor să vadă imaginea, pentru că el privește relaxat.

2. Folosind figura 5.17.b (linia continuă), din asemănarea triunghiurilor, rezultă:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\delta}{f} = G$$

deci mărimea imaginii date de lupă este:

$$y_2 = G y_1$$

3. O lentilă simplă, cu distanța focală mică, folosită ca lupă, este puternic afectată de aberații, care limitează puterea ei optică și reduc din calitatea imaginii.

### 5.3.2. Microscopul

Pentru observarea obiectelor ale căror dimensiuni liniare cad sub puterea separatoare a lupei, se folosește *microscopul* (figura 5.18).

Acesta este alcătuit din două sisteme optice convergente montate în corpuri metalice separate (obiectivul, adus în vecinătatea obiectului, respectiv ocularul, adus în vecinătatea ochiului) și dă o imagine mărită a unui obiect plasat la o distanță finită față de obiectiv, în condițiile în care obiectele sunt prea mici pentru a fi observate cu ochiul liber.

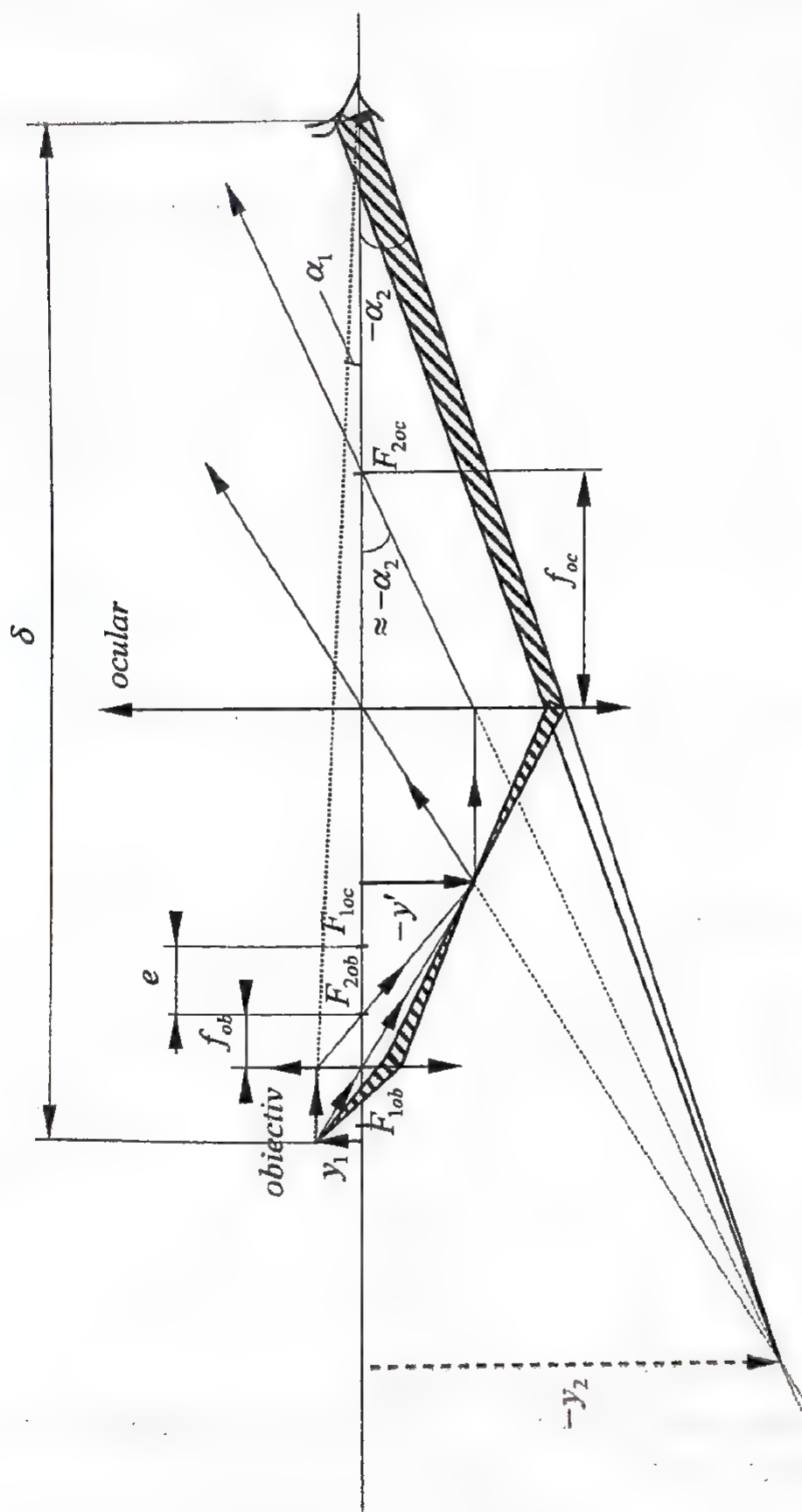


Figura 5.18. Formarea imaginii într-un microscop

Obiectivul este format dintr-un ansamblu de lentile plasate aproape de obiect, are o distanță focală mică, de ordinul milimetrilor și dă o imagine reală, răsturnată și mărită a obiectului.

Această imagine mai poartă numele de *imagine intermediară*, pentru că este preluată ca obiect de către ocular.

La rândul său, ocularul este format dintr-un ansamblu de lentile convergente, cu o distanță focală mai mare decât a obiectivului, de ordinul centimetrilor.

El joacă rol de lupă, în sensul că preia ca obiect imaginea intermediară dată de obiectiv și formează o imagine virtuală a acesteia, obținându-se astfel imaginea finală, prin microscop, a obiectului. Trebuie menționat faptul că imaginea intermediară se formează între ocular și focarul obiect al acestuia (foarte aproape de focar).

*Puterea optică* a microscopului este<sup>12</sup>:

$$P = \frac{\operatorname{tg}(-\alpha_2)}{y_1}$$

Deoarece ochiul preferă să privească neacomodat imaginea  $y_2$ , razele emergente sunt aproximativ paralele; rezultă:

$$\operatorname{tg}(-\alpha_2) \approx \frac{-y'}{f_{oc}}$$

și puterea optică devine:

$$P = -\frac{y'}{y_1} \cdot \frac{1}{f_{oc}} = -\beta_{ob} \cdot \frac{1}{f_{oc}} = -\beta_{ob} \cdot P_{oc} = -\frac{x_{2ob}}{x_{1ob}} \cdot P_{oc} = -\frac{x_{2ob}}{x_{1ob}} \cdot \frac{1}{f_{oc}}$$

unde raportul:

$$\frac{y'}{y_1} = \beta_{ob}$$

reprezintă *mărirea liniară a obiectivului*, iar

$$\frac{1}{f_{oc}} = P_{oc}$$

este *puterea ocularului*.

Imaginea intermediară  $y'$  se află foarte aproape de  $F_{loc}$  și se poate scrie (figura 5.19):

<sup>12</sup> Se folosește convenția geometrică de semne



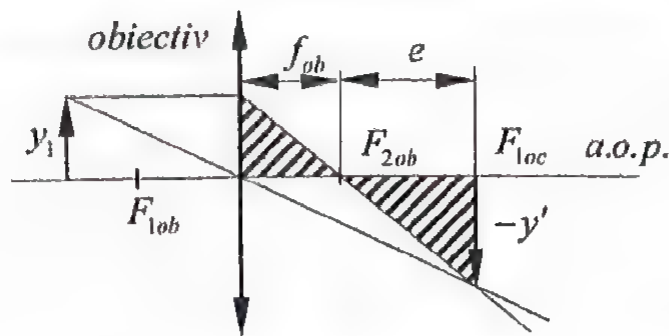


Figura 5.19. Formarea imaginii în obiectivul microscopului.

$$\frac{e}{f_{ob}} = \frac{-y'}{y_1} \Rightarrow y' = -y_1 \frac{e}{f_{ob}}$$

respectiv:

$$P = -\frac{y'}{y_1 f_{oc}} = \frac{ey_1}{y_1 f_{oc} f_{ob}} = \frac{e}{f_{ob} \cdot f_{oc}}$$

Grosimentul microscopului este:

$$G = \frac{\tan(-\alpha_2)}{\tan \alpha_1}$$

$\alpha_1$  fiind unghiul sub care se vede obiectul, direct, așezat la distanța minimă de citire,  $\delta = 0,25 \text{ m}$ . Conform figurii 5.18:

$$\left. \begin{array}{l} \tan(-\alpha_2) = \frac{-y'}{f_{oc}} \\ \tan \alpha_1 = \frac{y_1}{\delta} \end{array} \right\} \Rightarrow G = \frac{-y'}{y_1} \cdot \frac{\delta}{f_{oc}} = -\beta_{ob} \cdot \frac{\delta}{f_{oc}} = -\frac{x_{2ob}}{x_{1ob}} \cdot \frac{\delta}{f_{oc}} = -\delta \beta_{ob} P_{oc}$$

respectiv:

$$G = \frac{-y'}{y_1} \cdot \frac{\delta}{f_{oc}} = -\left(-y_1 \frac{e}{f_{ob}}\right) \cdot \frac{1}{y_1} \cdot \frac{\delta}{f_{oc}} = \frac{\delta e}{f_{ob} \cdot f_{oc}} = \delta P$$

### 5.3.3. Luneta

Luneta este un instrument optic cu imagine virtuală, folosit la observarea obiectelor foarte îndepărtate, astfel încât se poate considera că de la orice punct al acestora ajung la noi fascicule practic paralele.

Obiectivul lunetei are o distanță focală mare și formează o imagine a obiectului, în planul său focal (razele venind, practic, de la infinit).

Ocularul lunetei are o distanță focală mică, de ordinul centimetrilor și formează imaginea finală a obiectului prin lunetă, preluând ca obiect imaginea intermediară formată de obiectiv. Ea joacă rolul unei lupe, imaginea intermediară formându-se foarte aproape de focarul obiect al ocularului (dar între ocular și focar) și dând o imagine finală virtuală, dreaptă față de imaginea intermediară.

Fie un obiect astronomic  $AB$ . Luneta se îndreaptă cu axa optică principală spre extremitatea  $A$  a acestuia; toate razele provenite de la  $A$  sunt paralele cu axa optică și converg în focarul principal imagine  $F_{2ob}$  al obiectivului (figura 5.20).

Asupra obiectivului cade și un fascicul de raze paralele între ele, care provin de la extremitatea  $B$  a obiectului, dar înclinate sub un unghi  $\alpha_1$  față de primul fascicul; aceste raze converg în focarul secundar  $B'$  al obiectivului. Astfel, în planul focal al obiectivului se obține imaginea intermediară reală și răsturnată,  $y'$ .

Ochiul preferă însă să privească neacomodat imaginea, astfel încât observatorul deplasează ocularul pentru ca imaginea finală să se formeze la infinit, deci focarul obiect al ocularului,  $F_{1oc}$ , să coincidă cu planul imaginii intermediare  $y'$ . Se obține astfel un *sistem afocal*, iar razele pe direcția lui  $B_2$  pot fi considerate paralele. Cu notațiile din figura 5.20, rezultă:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(-\alpha_2) &= \frac{-y'}{f_{oc}} \\ \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{-y'}{f_{ob}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

Deoarece ocularul funcționează ca o lupă,

$$\frac{1}{f_{oc}} = P_{oc} \Rightarrow G = f_{ob} P_{oc}$$

### Observație

Această lunetă dă imagini răsturnate ale obiectelor astronomice; ea se mai numește și *lunetă astronomică*.

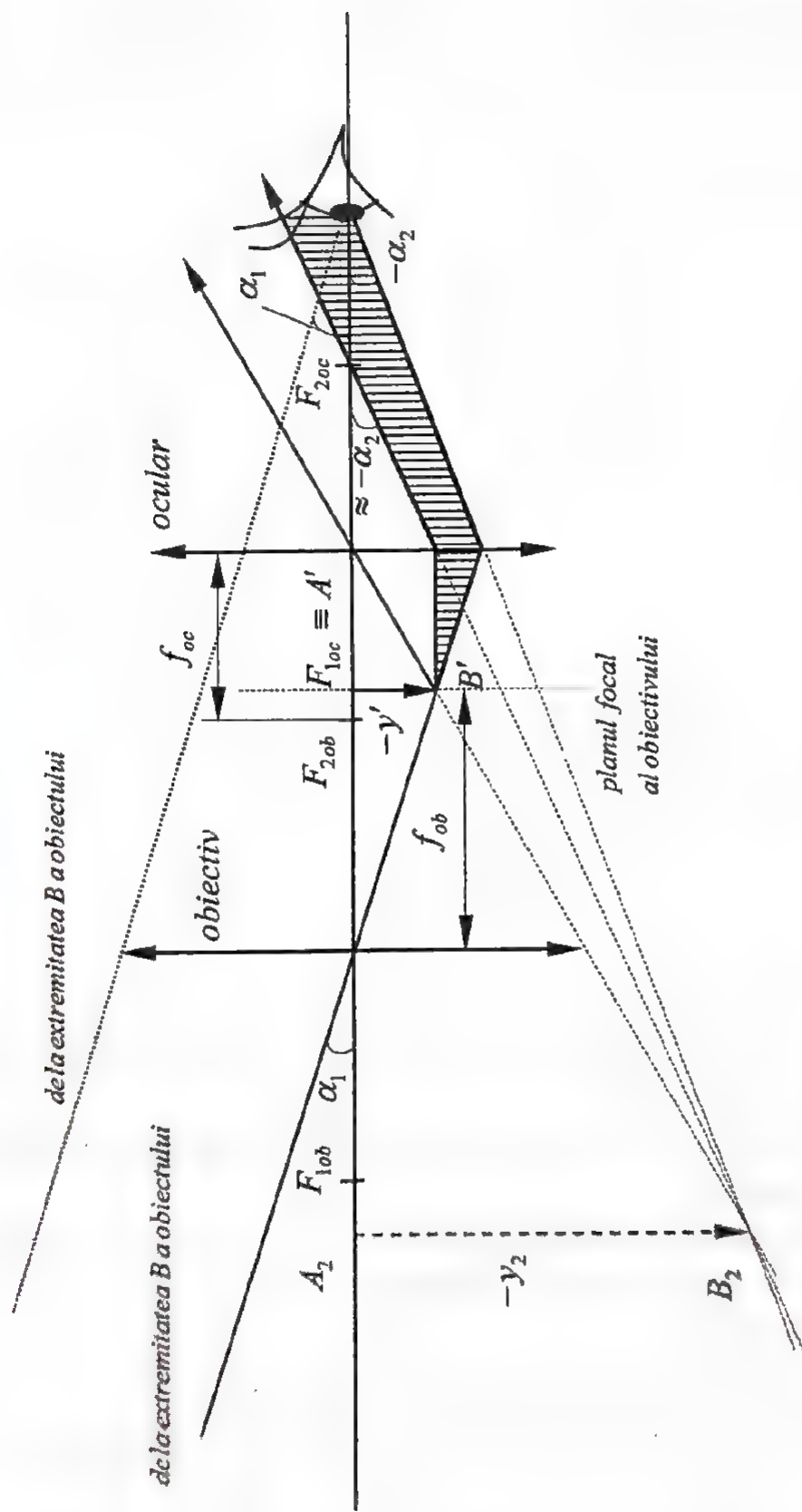


Figura 5.20. Formarea imaginii în luneta astronomică

Pentru studiul obiectelor terestre, lunetele au un dispozitiv de răsturnare a imaginii:

- se introduce între obiectiv și ocular o lentilă convergentă (lentilă vehicul)
- se înlocuiește ocularul cu o lentilă divergentă așa cum este cazul lunetei Galilei (figura 5.21)

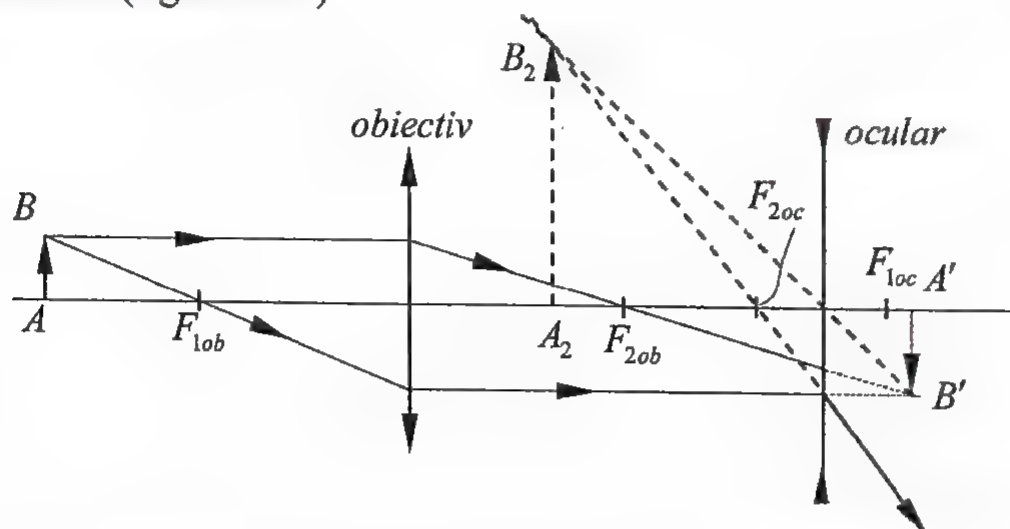


Figura 5.21. formarea imaginii în luneta Galilei

Se obține astfel o imagine finală dreaptă.

## 5.4. Aplicații

### Problema nr. 1.

Un obiect având înălțimea de  $1,5\text{ cm}$  este plasat la o distanță de  $5\text{ cm}$  în fața unei lupe.

a) Determinați grosimentul lupei și înălțimea imaginii, când ochiul este relaxat

b) Arătați ce se întâmplă dacă se folosește o altă lupă, pentru care imaginea poate fi privită neacomodat, dacă obiectul se plasează la  $10\text{ cm}$  de aceasta

c) Arătați ce s-ar întâmpla în cazul primei lupe dacă ochiul ar fi focalizat la distanța optimă de vedere clară,  $\delta = 25\text{ cm}$

### Rezolvare

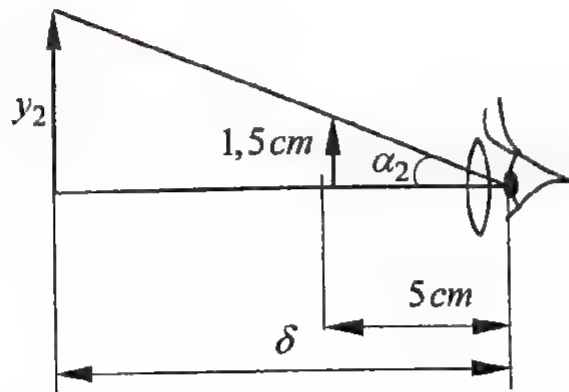
- obiectul se plasează între lentilă și focarul acesteia, în apropierea focarului, deci distanța focală a lupei este:



$$f = 5 \text{ cm}$$

- imaginea este privită cu ochi relaxat, deci:

$$G = \frac{\delta}{f} = \frac{25}{5} = 5$$



- din geometria situației:

$$(\operatorname{tg} \alpha =) \frac{y_1}{f} = \frac{y_2}{\delta} \Rightarrow y_2 = y_1 \frac{\delta}{f} = y_1 G = 1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ cm}$$

- în cazul în care se folosește cea de a doua lupă, aceasta va avea distanța focală:

$$f' = 10 \text{ cm}$$

respectiv grosimentul:

$$G' = \frac{\delta}{f'} = \frac{25}{10} = 2,5$$

- imaginea va avea mărimea:

$$y'_2 = y_1 G' = 1,5 \cdot 2,5 = 3,75 \text{ cm}$$

- în cazul ochiului acomodat, grosimentul devine:

$$G'' = \frac{\delta}{f} + 1 = \frac{25}{5} + 1 = 6$$

iar înălțimea imaginii se modifică:

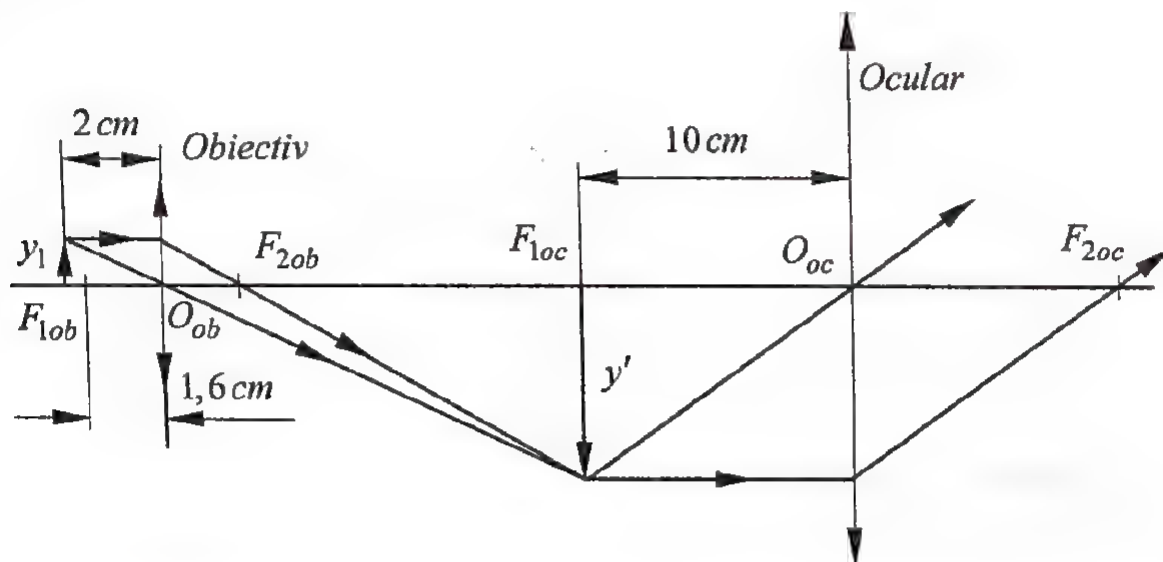
$$y''_2 = y_1 G'' = 1,5 \cdot 6 = 9 \text{ cm}$$

## Problema nr. 2.

Folosind figura de mai jos, determinați grosimentul microscopului. Se presupune că ochiul este la distanța optimă de vedere clară ( $\delta = 25 \text{ cm}$ ).

### Rezolvare

- dacă imaginea finală, formată de ocular, este la infinit, ochiul este relaxat; dacă imaginea nu se formează la infinit, ochiul nu este relaxat și se folosește acomodarea



- rezultă că, pentru ca imaginea să se formeze la infinit, trebuie ca imaginea intermediară să se formeze în focarul obiect al ocularului
- grosimentul se calculează cu relația:

$$G = \frac{\delta e}{f_{ob} \cdot f_{oc}}$$

unde  $e$  este distanța dintre cele două focare (focarul imagine al obiectivului și focarul obiect al ocularului)

- trebuie determinată distanța dintre cele două focare
- cunoscând poziția obiectului față de obiectiv, se determină poziția imaginii intermediare față de acesta:

$$\frac{1}{f_{ob}} = \frac{1}{x_{2ob}} - \frac{1}{x_{1ob}} \Rightarrow x_{2ob} = \frac{x_{1ob} \cdot f_{ob}}{x_{1ob} + f_{ob}} = \frac{(-2) \cdot 1,6}{-2 + 1,6} = 8 \text{ cm}$$

- astfel, focarul obiect al ocularului trebuie să fie la 8 cm față de obiectiv; distanța dintre cele două focare este:

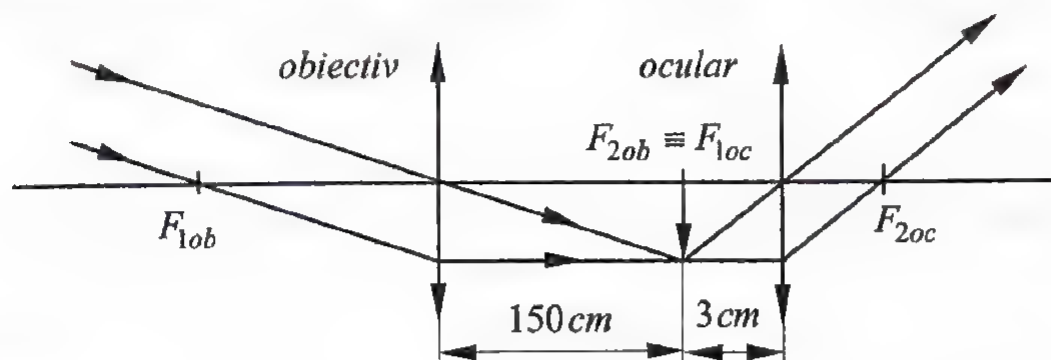
$$e = 8 - 1,6 = 6,4 \text{ cm}$$

iar grosimentul va fi:

$$G = \frac{25 \cdot 6,4}{1,6 \cdot 10} = 10$$

**Problema nr. 3.**

Pornind de la figura de mai jos, determinați grosismentul instrumentului optic atunci când ochiul este relaxat.



**Rezolvare**

- figura prezintă o lunetă astronomică, având distanțele focale:

$$f_{ob} = 150 \text{ cm}$$

$$f_{oc} = 3 \text{ cm}$$

- rezultă că grosismentul are valoarea:

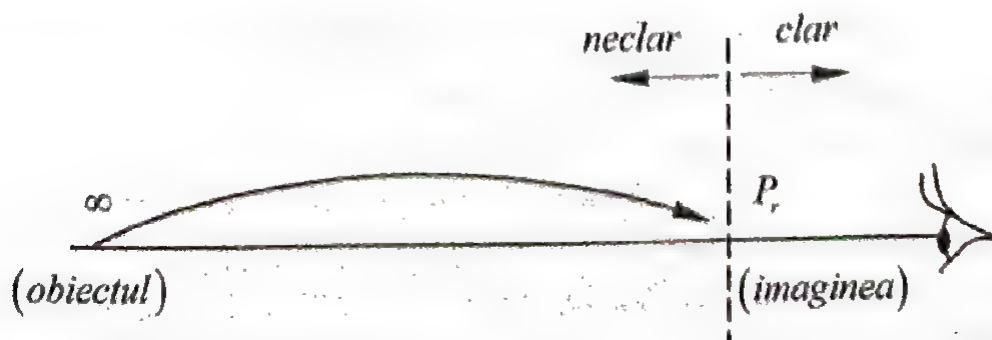
$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = \frac{150}{3} = 50$$

**Problema nr. 4.**

Un miop are punctum remotum la 50 cm de ochi. Să se prescrie o lentilă potrivită pentru a-i corecta defectul de vedere.

**Rezolvare**

- punctum remotum reprezintă cel mai îndepărtat punct pe care îl poate vedea o persoană
- miopul vede neclar orice obiect situat dincolo de punctum remotum



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

- se consideră că pentru un ochi normal (emetrop) punctum remotum este situat la infinit, adică la distanțe mai mari de  $25\text{ cm}$
- scopul lentilei corectoare este de a aduce un obiect îndepărtat (adică situat la infinit) în punctum remotum al miopului, pentru ca acesta să îl poată vedea clar
- astfel, distanța lentilă-obiect este

$$x_1 = -\infty$$

iar distanța lentilă-imagi:

$$x_2 = -50\text{ cm}$$

- se observă că atât obiectul, cât și imaginea sunt în stânga lentilei, deci vor avea semnul minus
- distanța focală a lentilei este:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow f = x_2 = -50\text{ cm}$$

- semnul minus arată că lentila este divergentă
- deoarece prescripțiile oftalmologice indică convergența lentilelor corectoare:

$$C = \frac{1}{f} = -\frac{1}{50 \cdot 10^{-2}} = -2\text{ dioptrii}$$

- prin urmare, pacientului i se va recomanda o lentilă corectoare divergență de două *dioptrii*

### Observație

- nu s-a luat în considerare distanța ochi-lentilă; aceasta este nulă în cazul unor lentile de contact
- în general, distanța ochi-lentilă (distanța vertex<sup>13</sup>) este de  $1,5 - 2\text{ cm}$
- pentru un vertex egal cu  $1,5\text{ cm}$ , distanța lentilă-punct remotum devine:

$$|x'_2| = 50 - 1,5 = 48,5\text{ cm}$$

distanța lentilă-obiect rămânând tot infinit

- distanța focală a lentilei se modifică și ea:

$$f' = x'_2 = -48,5\text{ cm}$$

<sup>13</sup> Distanța dintre suprafața posterioară a lentilei și corneea se numește distanță vertex a lentilei.



iar convergența ei devine:

$$C' = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{48,5 \cdot 10^{-2}} = -2,06 \text{ dioptrii}$$

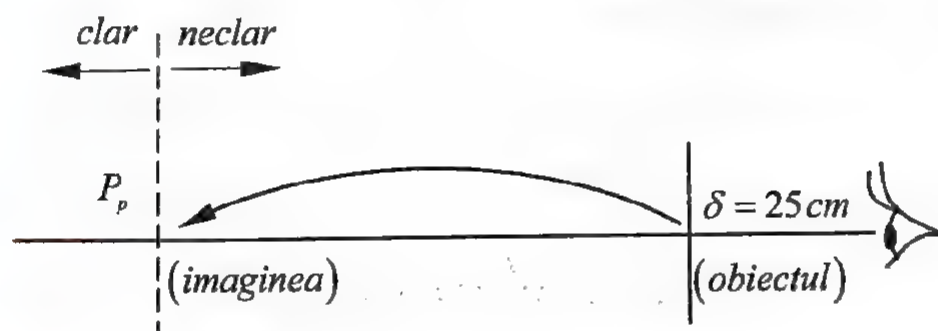
- deoarece nu se confecționează lentile cu o astfel de convergență, se va prescrie o lentilă negativă de două *dioptrii*<sup>14</sup>

### Problema nr. 5.

Un hipermetrop are punctum proximum la 75 cm de ochi. Să se prescrie o lentilă potrivită pentru a-i corecta defectul de vedere.

### Rezolvare

- un hipermetrop vede clar obiectele îndepărtate, dar are probleme la vederea celor apropiate, deci nu va vedea clar un obiect situat la distanța optimă de vedere clară a unui emetrop



- scopul lentilei corectoare este de a duce imaginea obiectului (apropiat de ochi) în punctum proximum, pentru că hipermetropul doar aici îl vede bine

- prin urmare, având un obiect situat la 25 cm în fața ochiului, lentila va trebui să îi formeze imaginea la 75 cm de ochi

- distanța sa focală este:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Rightarrow f = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} = \frac{(-25)(-75)}{-25 - (-75)} = 37,5 \text{ cm}$$

<sup>14</sup> Lentilele de ochelari se produc în serie de masă pentru gama de dioptrii  $(0 \dots \pm 20)$  dioptrii, cu pasul  $\pm 0,25$  dioptrii în intervalul  $(0 \dots \pm 3)$  dioptrii,  $\pm 0,5$  dioptrii în intervalul  $(\pm 3 \dots \pm 6)$  dioptrii și  $\pm 1$  dioptrie pe restul domeniului

unde s-a ținut cont de faptul că atât obiectul, cât și imaginea se află la stânga lentilei

- convergența acesteia este:

$$C = \frac{1}{f} = \frac{1}{37,5 \cdot 10^{-2}} = 2,66 \text{ dioptrii}$$

ceea ce înseamnă că hipermetropul va primi o lentilă (convergentă) de 2,5 dioptrii

### Observație

- dacă se ia în considerare distanța vertex (de regulă 1,5 cm), se vor utiliza distanțele:

$$|x'_1| = 25 - 1,5 = 23,5 \text{ cm}$$

$$|x'_2| = 75 - 1,5 = 73,5 \text{ cm}$$

deci distanța focală devine:

$$f' = \frac{x'_1 x'_2}{x'_1 - x'_2} = \frac{(-23,5)(-73,5)}{-23,5 - (-73,5)} = 34,5 \text{ cm}$$

respectiv convergența:

$$C' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{34,5 \cdot 10^{-2}} = 2,89 \text{ dioptrii}$$

- deoarece în practică se lucrează cu cea mai mică convergență pentru care pacientul distinge obiectele, acestuia i se vor prescrie lentile pozitive cu o convergență de 2,5 dioptrii, nu de 3 dioptrii

## CAPITOLUL 6. SISTEME CENTRATE

Se numește *sistem centrat* (figura 6.1) un ansamblu de dioptri sferici care au centrele de curbura pe aceeași dreaptă, numită *axa sistemului*.

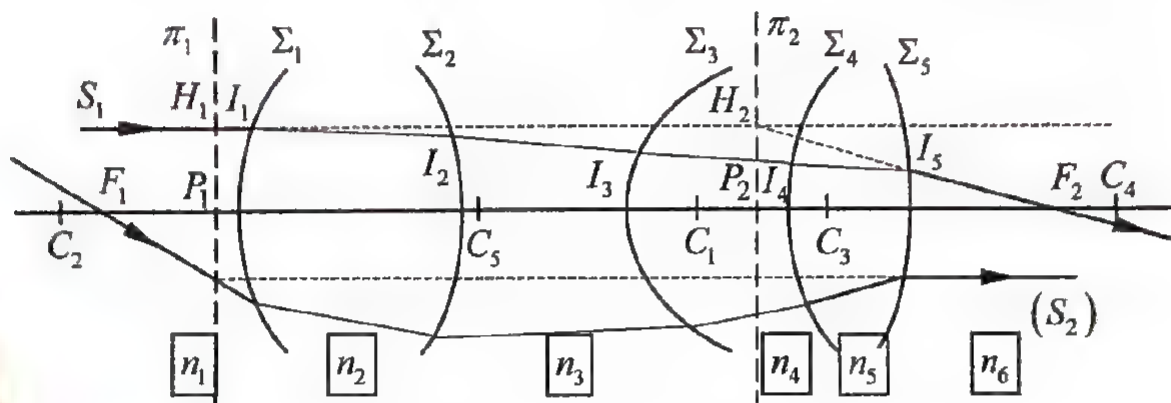


Figura 6.1. Refracții succesive printr-un sistem optic centrat

Se numește *secțiune principală* a sistemului centrat, un plan care conține axa sistemului; dacă o rază are două puncte conținute în acest plan, ea este conținută în întregime în planul considerat.

Se respectă următoarele reguli:

- axa optică este perpendiculară simultan pe toți dioptrii
- o rază de lumină se propagă de-a lungul axei optice fără să devieze

## 6.1. Punctele cardinale ale unui sistem centrat

Se notează cu  $F_1$  focarul obiect al sistemului de dioptri  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  și cu  $F_2$  focarul imagine al acestuia.

Se rețin doar primul și ultimul dioptru dintre toți dioptrii care alcătuiesc sistemul (figura 6.2).

Fie raza  $S_1 I_1$ , paralelă cu axa optică a sistemului. Ea părăsește sistemul trecând prin focarul  $F_2$ . Prelungind direcția razei incidente și a celei emergente, ele se întâlnesc în  $H_2$ ; acesta definește planul  $\pi_2$ ,

perpendicular pe axa optică. Planul  $\pi_2$  poartă numele de *plan principal imagine*.

În mod asemănător se obține punctul  $H_1$ , care definește planul  $\pi_1$ , numit *plan principal obiect*.

Planele principale au proprietatea că sunt conjugate și corespund unei mărituri liniare (laterale) egală cu +1 (obiectul și imaginea au aceeași mărime și același sens).

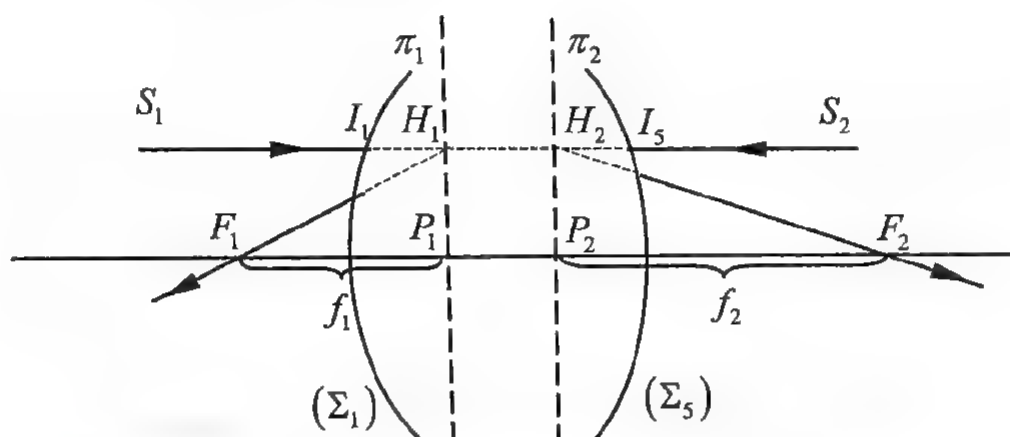


Figura 6.2. Planele principale ale unui sistem centrat

La intersecția planelor principale cu axa optică se află *punctele principale* ale sistemului: punctul principal obiect  $P_1$ , respectiv punctul principal imagine  $P_2$ . Distanța  $P_1P_2$  se numește *interstițiul sistemului*.

Se definește *distanța focală* a sistemului ca fiind distanța de la planul principal la focarul corespunzător. Dacă mediul din care vine raza incidentă este același cu cel în care raza iese, cele două distanțe focale sunt egale.

Dacă raza care trece printr-un sistem optic iese paralel cu direcția incidentă, cele două direcții intersectează axa optică în *punctele nodale*  $N_1$  și  $N_2$  (figura 6.3).

Fie punctul  $A_1$ , situat în planul focal obiect al sistemului; razele incidente care pornesc de aici vor emerge într-un fascicul paralel. În fasciculul incident poate fi o singură rază paralelă cu direcția fasciculului emergent și anume  $A_1N_1$ ; aceasta intersectează axa optică



principală în  $N_1$ , iar raza emergentă care îi corespunde, intersectează axa optică principală în  $N_2$ .

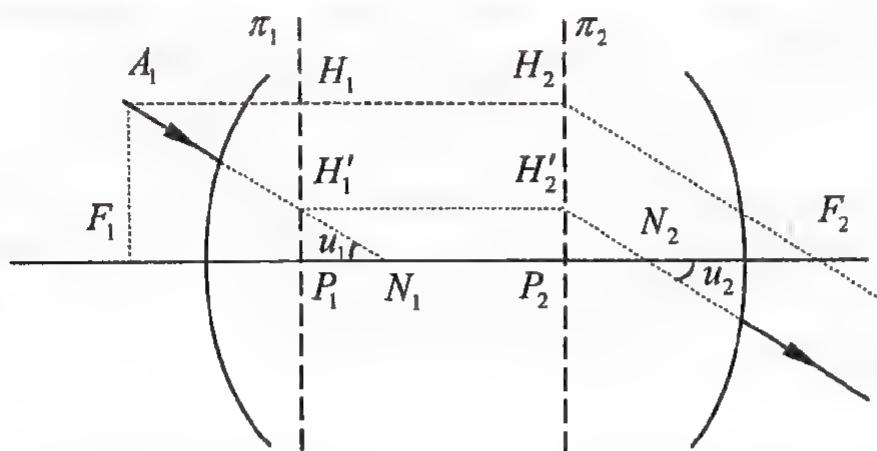


Figura 6.3. Punctele nodale ale unui sistem centrat

Conform figurii de mai sus, se poate scrie:

$$\Delta A_1 F_1 N_1 \equiv \Delta H_2 P_2 F_2 \Rightarrow F_1 N_1 \equiv P_2 F_2 = f_2, \text{distanța focală imagine}$$

$$\Delta P_1 N_1 H'_1 \equiv \Delta P_2 N_2 H'_2 \Rightarrow P_1 N_1 \equiv P_2 N_2 \Rightarrow F_1 P_1 = F_2 N_2 = f_1, \text{distanța focală obiect}$$

Poziția punctelor nodale poate fi unic determinată pe baza poziției focarelor și a valorii distanțelor focale. Mai mult:

$$P_1 P_2 = P_1 N_1 + N_1 P_2 = P_2 N_2 + N_1 P_2 = N_1 N_2$$

$$N_1 N_2 \equiv P_1 P_2 = \text{interstițiul sistemului}$$

Dacă mediile exterioare au același indice de refracție, cele două puncte nodale se confundă cu punctele principale:

$$N_1 \equiv P_1; N_2 \equiv P_2$$

Focarele, punctele principale și punctele nodale ale sistemului optic poartă denumirea generică de *puncte cardinale*. Ele servesc la determinarea mersului razei de lumină prin sistemul optic.

### Observații

#### 1. Deoarece avem egalitatea

$$u_1 = u_2$$

punctele nodale se pot defini ca fiind acele puncte conjugate care introduc mărirea unghiulară egală cu +1.

2. Punctele cardinale au primit acest nume în ideea că cele trei perechi de puncte descriu complet proprietățile de prim ordin ale unui sistem optic.

Două perechi de puncte cardinale sunt conjugate: punctul principal imagine este imaginea punctului principal obiect, același lucru fiind valabil și pentru punctele nodale, unul este imaginea celuilalt prin sistemul considerat. Punctele focale nu sunt conjugate.

Două perechi de puncte cardinale sunt asociate la două plane (punctele focale sunt situate în planele focale, iar punctele principale se află conținute în planele principale), dar nu există un plan nodal asociat unui punct nodal.

3. Punctele nodale se comportă similar centrului de curbură a unui dioptru sferic sau centrului optic al unei lentile subțiri.

## 6.2. Formarea imaginilor prin sisteme centrate

Fie raza  $SI_1$  (figura 6.4). Se va stabili direcția sa după ce traversează sistemul. Pentru aceasta, se determină punctul  $H_1$ , ca intersecție a razei incidente  $SI_1$  cu planul principal  $\pi_1$ . Cunoscându-l pe  $H_1$ , se determină  $H_2$ , care este în același timp și punctul de pornire al razei emergente.

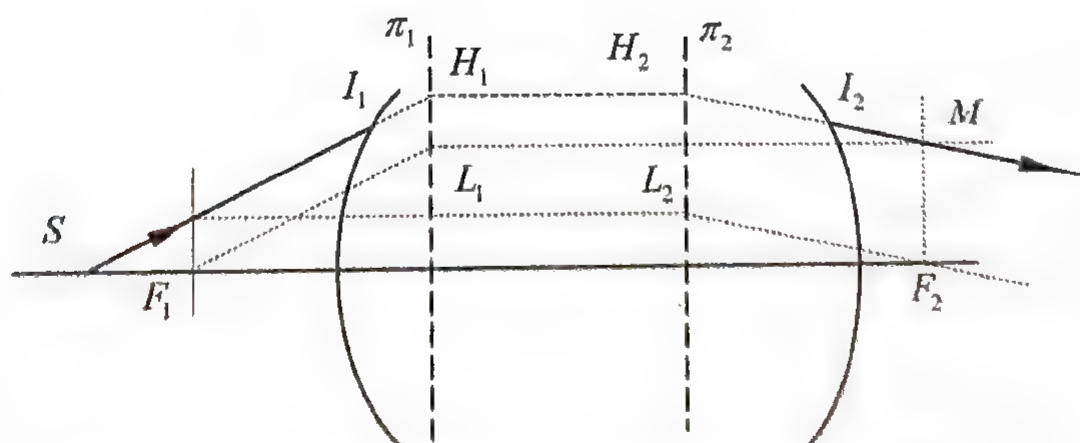


Figura 6.4. Stabilirea direcției de propagare a unei raze oarecare printr-un sistem centrat

Pentru determinarea unui alt punct al razei emergente, se va considera că sursa  $S$  este la infinit și mai trimite o rază, paralelă cu prima, care va trece prin focarul obiect  $F_1$ .

Aceasta va intersecta planul principal imagine  $\pi_1$  în punctul  $L_1$ , căruia îi va corespunde punctul  $L_2$ , situat în planul  $\pi_2$  (se va ține cont și în acest caz că planele principale sunt conjugate și introduc o mărire liniară egală cu +1). Direcția  $L_1L_2$  este paralelă cu axa optică, iar raza  $L_1L_2$  rămâne paralelă cu axa optică și după ce părăsește sistemul. Imaginea punctului de la infinit se formează, însă, în planul focal imagine care, intersectat cu direcția  $L_1L_2$  dă punctul  $M$ , cel de-al doilea punct al razei emergente.

### 6.2.1. Reguli de construire a imaginilor

Se pot enunța regulile de construire a imaginii, făcând o paralelă cu cele cunoscute la lentilele subțiri și respectând notațiile din figura 6.5 (tabelul 6.1):

Tabelul 6.1. Reguli de construire a imaginilor prin sisteme optice centrate

Nr. crt.	Reguli lentile subțiri	Reguli sisteme centrate
1	- dacă direcția razei incidente este paralelă cu axa optică, direcția razei emergente trece prin focarul imagine	<ul style="list-style-type: none"> <li>- se construiește raza incidentă paralelă cu axa optică principală, până întâlnește planul principal obiect <math>\pi_1</math> în punctul <math>H_1</math></li> <li>- deoarece planele principale corespund unei mărimi liniare transversale egală cu +1, se „transferă” raza de la planul principal obiect <math>\pi_1</math> la planul principal, imagine <math>\pi_2</math>, pe care îl întâlnește în punctul <math>H_2</math></li> <li>- raza emergentă părăsește sistemul în punctul <math>H_2</math> și va trece prin focarul imagine <math>F_2</math></li> </ul>
2	- dacă direcția razei incidente trece prin	- se construiește raza incidentă astfel încât direcția sa să treacă prin focarul obiect $F_1$

	focarul obiect, direcția razei emergente este paralelă cu axa optică	<ul style="list-style-type: none"> <li>- se trasează mai departe direcția razei incidente, până când întâlnește planul principal obiect <math>\pi_1</math> în punctul <math>H'_1</math></li> <li>- se realizează „transferul” de la planul principal obiect la planul principal imagine <math>\pi_2</math>, pe care îl întâlnește în punctul <math>H'_2</math></li> <li>- raza emergentă părăsește sistemul în punctul <math>H'_2</math>, având direcția paralelă cu axa optică principală</li> </ul>
3	- dacă raza incidentă trece prin centrul optic al lentilei, se propagă mai departe nedeviată	<ul style="list-style-type: none"> <li>- direcția razei incidente trece prin punctul nodal obiect</li> <li>- direcția razei emergente va fi paralelă cu cea a razei incidente, dar va „porni” din punctul nodal imagine</li> </ul>

Fie un obiect liniar  $A_1B_1$ , perpendicular pe axa optică a unui sistem centrat (figura 6.5). Imaginea acestuia,  $A_2B_2$ , a fost construită folosind regulile enunțate mai sus, considerând implicit că la stânga și la dreapta sistemului este același mediu (din acest motiv, punctele nodale se confundă cu cele principale).

În orice altă situație, construirea imaginii se face respectând tot aceleași reguli, cu mențiunea că punctele principale și cele nodale nu coincid (figura 6.6).

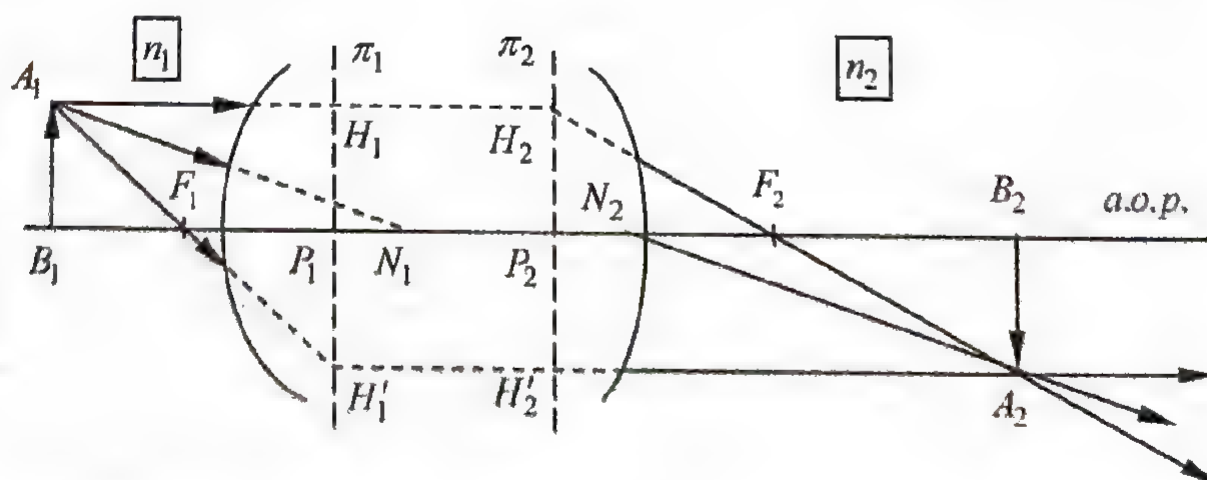


Figura 6.6. Construirea imaginii unui obiect printr-un sistem centrat, atunci când acesta este mărginit la stânga și la dreapta de medii diferite



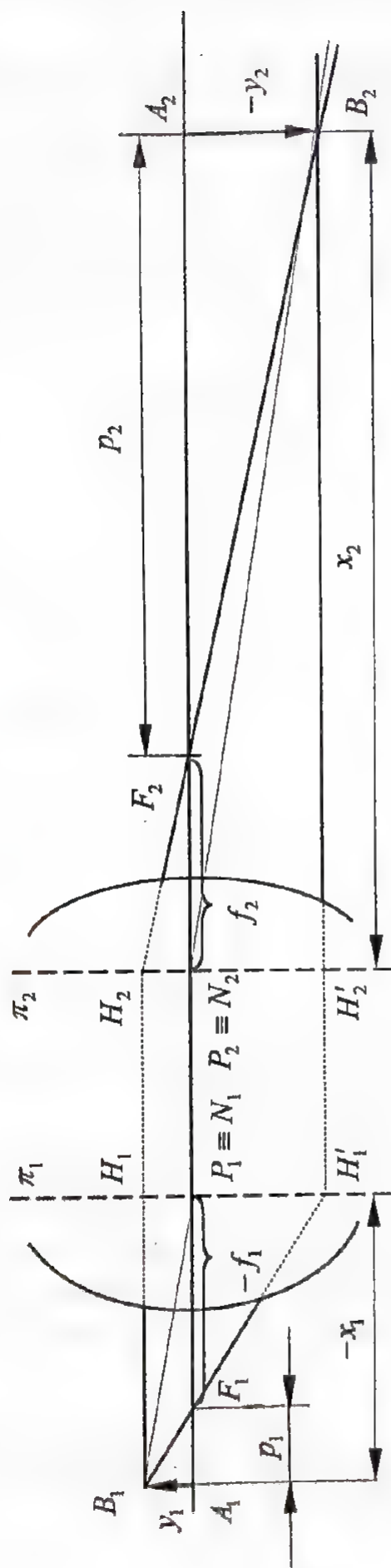


Figura 6.5. Construirea imaginii unui obiect printr-un sistem centrat, atunci când acesta este mărginit la stânga și la dreapta de același mediu

### 6.2.2. Construirea imaginilor cu ajutorul focarelor

Atunci când se dorește trasarea mersului razelor printr-un sistem optic sau determinarea direcției razei incidente asociate unei raze emergente date, se pot folosi focarele secundare (obiect sau imagine).

Dacă este vorba despre a căuta raza emergentă asociată unei raze incidente oarecare, se procedează astfel (figura 6.7):

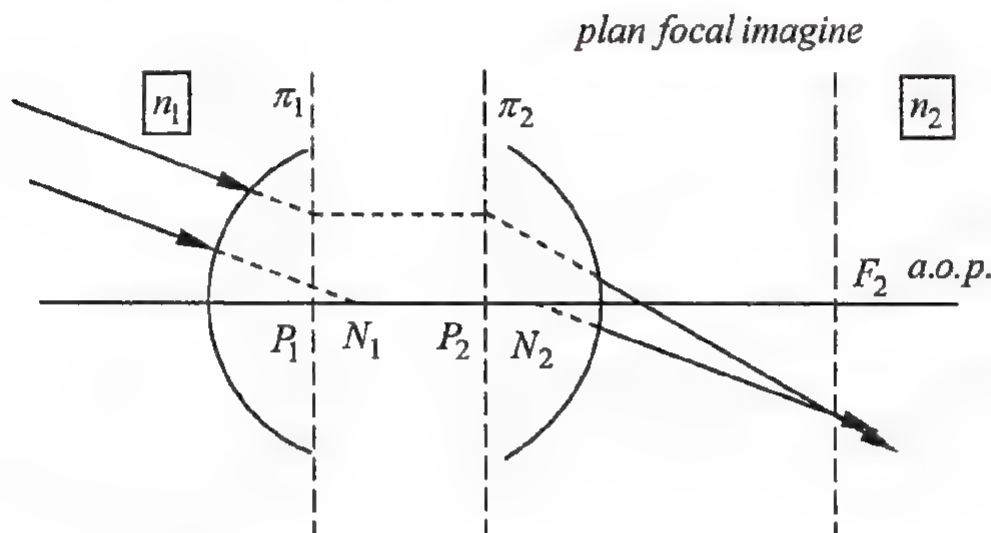


Figura 6.7. Determinarea direcției razei emergente atunci când raza incidentă are o direcție oarecare

- se construiește direcția paralelă cu raza incidentă dată, direcție care trebuie să treacă prin punctul nodal  $N_1$
- cunoscând poziția punctului nodal obiect, se determină poziția punctului nodal imagine ( $P_1N_1 = P_2N_2$ )
- se duce din punctul nodal imagine o paralelă la direcția razei incidente, care va intersecta planul focal imagine într-un focar secundar  $F_2'$
- se poate construi direcția razei incidente, pornind de la planul principal imagine, de la aceeași înălțime ca și intersecția dintre raza incidentă și planul principal obiect și trecând prin focarul secundar  $F_2'$  înainte determinat

#### Observații

Este util să se rețină următoarele:

- dacă direcția razei incidente trece prin punctul nodal obiect, atunci direcția razei emergente va trece prin punctul nodal imagine
- razele se propagă paralel cu axa între planele principale obiect și imagine
- atunci când cunoaște direcția razei emergente și vrem și se dorește determinarea direcției razei incidente, se respectă aceiași pași, dar în sens invers; se poate invoca aici principiul reversibilității drumului razelor de lumină !

### 6.2.3. Relații de conjugare

În figura 6.5. se observă următoarele:

$$\Delta B_1 H_1 H'_1 \sim \Delta F_1 P_1 H'_1 \Rightarrow \frac{B_1 H_1}{F_1 P_1} = \frac{H_1 H'_1}{P_1 H'_1} \left( = \frac{B_1 H'_1}{F_1 H'_1} \right)$$

$$\frac{-x_1}{-f_1} = \frac{y_1 - y_2}{-y_2} \Rightarrow y_2 = (y_1 - y_1) \frac{f_1}{x_1}$$

respectiv:

$$\Delta H_2 P_2 F_2 \sim \Delta H_2 H'_2 B_2 \Rightarrow \frac{H_2 P_2}{H_2 H'_2} = \frac{P_2 F_2}{H'_2 B_2} \left( = \frac{H_2 F_2}{H_2 B_2} \right)$$

$$\frac{y_1}{y_1 - y_2} = \frac{f_2}{x_2} \Rightarrow y_1 = (y_1 - y_2) \frac{f_2}{x_2}$$

de unde rezultă *mărirea liniară*:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_2} \cdot \frac{f_1 x_2}{x_1 f_2} \Rightarrow \beta = - \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

Din rapoartele de asemănare mai rezultă și relațiile:

$$\frac{y_2}{y_2 - y_1} = \frac{f_1}{x_1}, \text{ respectiv } \frac{-y_1}{y_2 - y_1} = \frac{f_2}{x_2}$$

care se adună:

$$\frac{y_2}{y_2 - y_1} - \frac{y_1}{y_2 - y_1} = \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} \Rightarrow \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1$$

rezultând *ecuația punctelor conjugate*.

Conform figurii 6.5 se mai poate scrie:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 - f_1 = -x_1 \\ p_2 + f_2 = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = \frac{f_1(p_2 + f_2) + f_2(f_1 - p_1)}{(f_1 - p_1)(p_2 + f_2)}$$

de unde:

$$f_1 f_2 = -p_1 p_2$$

adică *ecuația lui Newton*.

În cele prezentate mai sus s-a folosit următoarea regulă de semne:

- măsurarea distanțelor se face de la planele principale:
  - spre stânga: sunt negative
  - spre dreapta: sunt pozitive
- mărimile care nu se măsoară de la planele principale sunt pozitive dacă lumina le parcurge de la stânga la dreapta
- toate distanțele măsurate pe verticală:
  - deasupra axei: sunt pozitive
  - sub axă: sunt negative

### 6.3. Asocierea sistemelor centrate

Fie două sisteme centrate cu aceeași axă optică. Se notează cu  $\Delta$  distanța dintre focarul imagine al primului sistem la focarul obiect al celui de-al doilea sistem (figura 6.8).

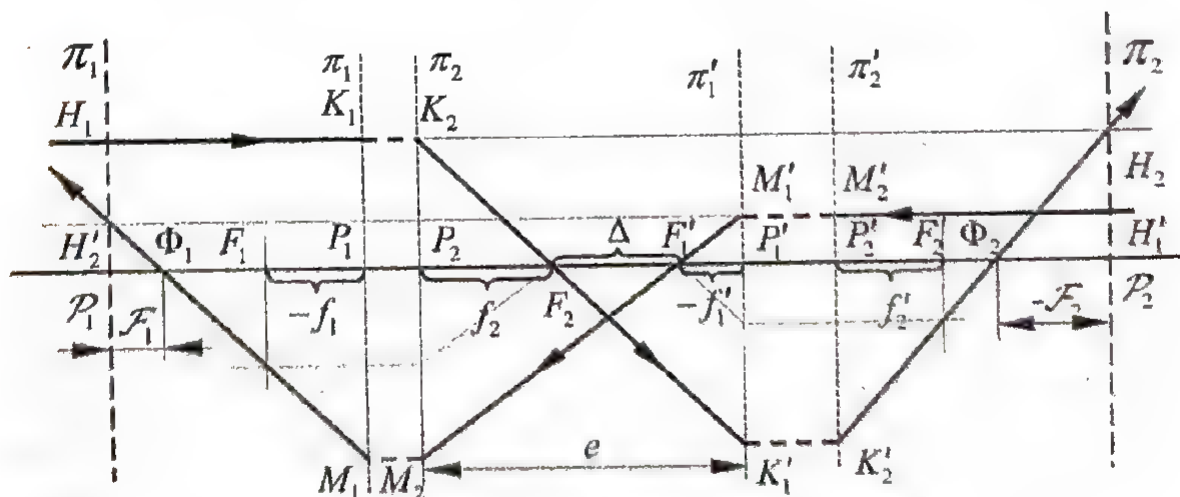


Figura 6.8. Asociere de sisteme centrate



Se observă că  $\Phi_2$  este imaginea lui  $F_2$  prin al doilea sistem. Dacă se aplică relația lui Newton, rezultă:

$$F_2 F_1' \cdot F_2' \Phi_2 = -f_1' f_2' \Rightarrow \Delta \cdot F_2' \Phi_2 = -f_1' f_2' \Rightarrow F_2' \Phi_2 = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}$$

Din asemănarea triunghiurilor  $\Delta K_2 P_2 F_2$  și  $\Delta K_1' P_1' F_2$  rezultă:

$$\frac{K_2 P_2}{K_1' P_1'} = \frac{P_2 F_2}{P_1' F_2} \left( = \frac{K_2 F_2}{K_1' F_2} \right) \Rightarrow \frac{K_2 P_2}{K_1' P_1'} = \frac{f_2}{\Delta - f_1'}$$

Din asemănarea triunghiurilor  $\Delta H_2 P_2 \Phi_2$  și  $\Delta K_2' P_2' \Phi_2$  se obține:

$$\frac{H_2 P_2}{K_2' P_2'} = \frac{P_2 \Phi_2}{P_2' \Phi_2} \left( = \frac{H_2 \Phi_2}{K_2' \Phi_2} \right) \Rightarrow \frac{H_2 P_2}{K_2' P_2'} = \frac{-\mathcal{F}_2}{f_2' + F_2' \Phi_2}$$

Deoarece:

$$K_2 P_2 \equiv H_2 P_2; K_1' P_1' \equiv K_2' P_2'$$

rezultă egalitatea:

$$\frac{K_2 P_2}{K_1' P_1'} = \frac{H_2 P_2}{K_2' P_2'} \Rightarrow \frac{f_2}{\Delta - f_1'} = -\frac{\mathcal{F}_2}{f_2' + F_2' \Phi_2} \Rightarrow \mathcal{F}_2 = -\frac{f_2 (f_2' + F_2' \Phi_2)}{\Delta - f_1'}$$

Folosind expresia lui  $F_2' \Phi_2$ , rezultă:

$$\mathcal{F}_2 = -\frac{f_2 \left( f_2' - \frac{f_1' f_2'}{\Delta} \right)}{\Delta - f_1'} \Rightarrow \mathcal{F}_2 = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}$$

Analog, se observă că  $\Phi_1$  este imaginea lui  $F_1'$  prin primul sistem. Se aplică:

- relația lui Newton:

$$F_2 F_1' \cdot F_1 \Phi_1 = -f_1 f_2 \Rightarrow \Delta \cdot F_1 \Phi_1 = -f_1 f_2 \Rightarrow F_1 \Phi_1 = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

- asemănarea triunghiurilor  $\Delta M_2 P_2 F_1'$  și  $\Delta M_1' P_1' F_1'$ :

$$\frac{M_1' P_1'}{M_2 P_2} = \frac{P_1' F_1'}{P_2 F_1'} \left( = \frac{M_1' F_1'}{M_2 F_1'} \right) \Rightarrow \frac{M_1' P_1'}{M_2 P_2} = \frac{-f_1'}{\Delta + f_2}$$

- asemănarea triunghiurilor  $\Delta H_2' P_1' \Phi_1$  și  $\Delta M_1 P_1 \Phi_1$ :

$$\frac{H'_2 \mathcal{P}_1}{M_1 P_1} = \frac{\mathcal{P}_1 \Phi_1}{P_1 \Phi_1} \left( = \frac{H'_2 \Phi_1}{M_1 \Phi_1} \right) \Rightarrow \frac{H'_2 \mathcal{P}_1}{M_1 P_1} = \frac{\mathcal{F}_1}{F_1 \Phi_1 - f_1}$$

Se ține cont de:

$$M_1 P_1 \equiv M_2 P_2$$

$$M'_1 P'_1 \equiv H'_2 \mathcal{P}_1$$

și rezultă:

$$\frac{M'_1 P'_1}{M_2 P_2} = \frac{H'_2 \mathcal{P}_1}{M_1 P_1} \Rightarrow \frac{-f'_1}{\Delta + f_2} = \frac{\mathcal{F}_1}{F_1 \Phi_1 - f_1} \Rightarrow \mathcal{F}_1 = -\frac{f'_1 \left( -\frac{f_1 f_2}{\Delta} - f_1 \right)}{\Delta + f_2}$$

$$\mathcal{F}_1 = \frac{f_1 f'_1}{\Delta}$$

#### 6.4. Mărirea liniară a sistemului afocal

Dacă în relațiile obținute mai sus,  $\Delta = 0$ , focarul imagine al primului sistem coincide cu focarul obiect al celui de-al doilea sistem, iar ansamblul se numește *ansamblu afocal* sau *telescopic* (figura 6.9). Rezultă că distanțele focale au valoarea:

$$\mathcal{F}_1 = \infty; \mathcal{F}_2 = -\infty$$

deci un fascicul paralel rămâne paralel și după traversarea celor două sisteme.

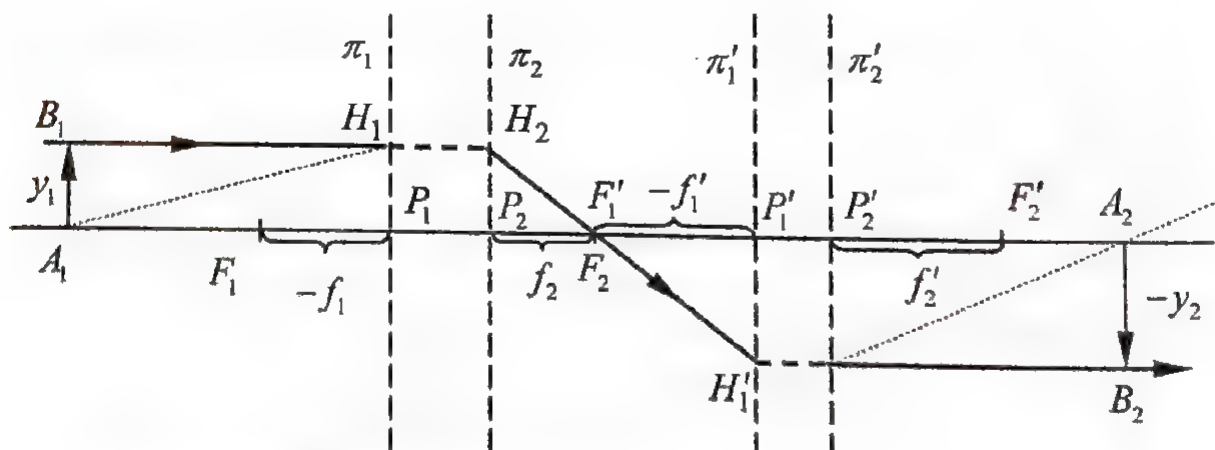


Figura 6.9. Mersul razelor de lumină printr-un sistem afocal

Se identifică triunghiurile asemenea  $\Delta H_2P_2F_2$  și  $\Delta H'_1P'_1F_2$  și se scrie raportul de asemănare:

$$\frac{H_2P_2}{H'_1P'_1} = \frac{P_2F_2}{P'_1F_2} \left( = \frac{H_2F_2}{H'_1F_2} \right) \Rightarrow \frac{y_1}{-y_2} = \frac{f_2}{-f'_1}$$

Mărirea liniară a sistemului este:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{f'_1}{f_2}$$

Se observă că mărirea liniară este aceeași, oricare ar fi poziția obiectului.

### 6.5. Lentila groasă

Se introduce noțiunea de lentilă (sferică) groasă ca un sistem de doi dioptri ale căror vârfuri sunt separate prin distanța  $e$ , cuprinzând un mediu de indice de refracție  $n$ . Pentru simplitatea calculelor, se va considera că lentila este plasată în aer ( $n_{aer} = 1$ ).

Sistemul celor doi dioptri formează o asociere de sisteme centrate, în care fiecare dioptru este un sistem centrat în care planele principale se confundă și trec prin vârful fiecărui dioptru (figura 6.10). Distanțele focale ale primului dioptru reprezintă distanțele focale ale primului sistem centrat, iar distanțele focale ale celui de-al doilea dioptru reprezintă distanțele focale ale celui alt sistem centrat.

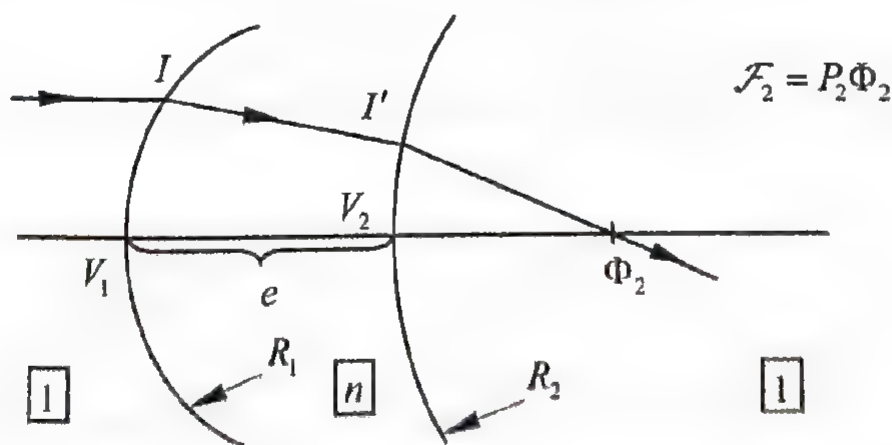


Figura 6.10. Lentila groasă văzută ca sistem de doi dioptri

Distanțele focale se măsoară față de vârfuri, prin care se consideră că trec planele principale (confundate) ale fiecărui dioptru.

Ecuția punctelor conjugate pentru primul dioptru este:

$$\frac{n}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{n-1}{R_1}$$

din care se determină expresia celor două focare:

- obiect:

$$x_2 \rightarrow \infty \Rightarrow x_1 \rightarrow f_1 \Rightarrow -\frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{R_1} \Rightarrow f_1 = -\frac{R_1}{n-1}$$

- imagine:

$$x_1 \rightarrow \infty \Rightarrow x_2 \rightarrow f_2 \Rightarrow \frac{n}{f_2} = \frac{n-1}{R_1} \Rightarrow f_2 = \frac{nR_1}{n-1}$$

Ecuția punctelor conjugate pentru al doilea dioptru este:

$$\frac{1}{p'_2} - \frac{n}{p'_1} = \frac{1-n}{R_2}$$

din care rezultă expresia celor două distanțe focale:

- obiect:

$$x'_2 \rightarrow \infty \Rightarrow x'_1 \rightarrow f'_1 \Rightarrow -\frac{n}{f'_1} = \frac{1-n}{R_2} \Rightarrow f'_1 = -\frac{nR_2}{1-n}$$

- imagine:

$$x'_1 \rightarrow \infty \Rightarrow x'_2 \rightarrow f'_2 \Rightarrow \frac{1}{f'_2} = \frac{1-n}{R_2} \Rightarrow f'_2 = \frac{R_2}{1-n}$$

Se observă că (figura 6.8):

$$e = f_2 + \Delta - f'_1 \Rightarrow \Delta = e + f'_1 - f_2$$

și se pot calcula cele două distanțe focale  $\mathcal{F}_1$  și  $\mathcal{F}_2$  ale sistemului:

$$\mathcal{F}_2 = -\frac{f'_2 f_2}{\Delta} = -\frac{\frac{R_2}{1-n} \cdot \frac{nR_1}{n-1}}{e - \frac{nR_2}{1-n} - \frac{nR_1}{n-1}} = \frac{nR_1 R_2}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)}{e(n-1) + nR_2 - nR_1}$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{1}{(n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{e(n-1)^2}{nR_1 R_2}}$$

respectiv:



$$\mathcal{F}_1 = \frac{f_1 f'_1}{\Delta} = \frac{\frac{R_1}{n-1} \cdot \left( -\frac{nR_2}{1-n} \right)}{e - \frac{nR_2}{1-n} - \frac{nR_1}{n-1}} = \frac{nR_1 R_2}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)}{e(n-1) + nR_2 - nR_1}$$

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{(n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{e(n-1)^2}{nR_1 R_2}}$$

Se observă că între distanțele focale ale lentilei groase există relația:

$$\mathcal{F}_2 = -\mathcal{F}_1$$

respectiv între convergențe:

$$\frac{1}{\mathcal{F}_2} = -\frac{1}{\mathcal{F}_1} \Rightarrow \mathcal{C}_2 = -\mathcal{C}_1$$

### Observații

1. Expresia distanței focale imagine, de exemplu, se poate deduce din:

$$\frac{1}{F_{im}} = \frac{(n-1)[e(n-1) + nR_2 - nR_1]}{nR_1 R_2} = \frac{e(n-1)^2 + n(n-1)R_2 - n(n-1)R_1}{nR_1 R_2} =$$

$$= \frac{e}{n} \cdot \frac{n-1}{R_1} \cdot \frac{n-1}{R_2} + \frac{n-1}{R_1} - \frac{n-1}{R_2}$$

Se identifică în relația de mai sus distanța focală obiect a primului dioptru,  $f_1$ , respectiv distanța focală imagine a celui de al doilea dioptru,  $f'_2$ .

Rezultă astfel:

$$\frac{1}{F_{im}} = \frac{e}{n} \cdot \left( -\frac{1}{f_1} \right) \cdot \left( -\frac{1}{f'_2} \right) - \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f'_2} = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f'_2} + \frac{e}{n} \cdot \frac{1}{f_1} \cdot \frac{1}{f'_2}$$

Se obișnuiește să se folosească notațiile din tabelul 6.2 și se obține relația lui Gullstrand:

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2$$

Tabelul 6.2. Semnificația notațiilor din expresia puterii optice echivalente a unei asociații de două sisteme centrate

Nr. crt.	Notație	Semnificație
1	$P = \frac{1}{F_{im}}$	- puterea optică echivalentă a sistemului centrat - reprezintă, practic, convergența lentilei groase (exprimată în $m^{-1}$ , adică în <i>dioptrii</i> )
2	$P_1 = -\frac{1}{f_1}$	- puterea optică a primei fețe a lentilei groase (exprimată în $m^{-1}$ , adică în <i>dioptrii</i> )
3	$P_2 = \frac{1}{f_2'}$	- puterea optică a celei de a doua fețe a lentilei groase (exprimată în $m^{-1}$ , adică în <i>dioptrii</i> )

2. Dacă în relația de mai sus se consideră că grosimea lentilei poate fi neglijată, se obține:

$$P = P_1 + P_2 = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2'} = \frac{n-1}{R_1} - \frac{n-1}{R_2} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}$$

adică ecuația punctelor conjugate a lentilelor subțiri

3. Ecuația punctelor conjugate obținută pentru lentilele subțiri își păstrează valabilitatea și în cazul lentilelor groase, obiectul, respectiv imaginea, poziționându-se față de planele principale corespunzătoare (și vor fi considerate pozitive dacă se citesc la dreapta acestora, respectiv negative dacă se citesc la stânga lor, conform regulilor convenției geometrice de semne).

## 6.6. Formule generale pentru determinarea poziției punctelor cardinale ale unei lentile groase

În studiul comportării sistemelor centrate se lucrează cu o serie de expresii matematice care poziționează punctele cardinale față de punctele principale sau față de focarele acestuia.

În cazul lentilelor groase, acestea se deduc în general prin folosirea formalismului matriceal. Se notează:

- $n_1$  - indicele de refracție al mediului de incidență (în spațiul obiect)
- $n_2$  - indicele de refracție al mediului de emergență (în spațiul imagine)

-  $n$  - indicele de refracție al lentilei

-  $e$  - grosimea lentilei

Se obțin următoarele relații:

- puterea optică echivalentă (Gullstrand):

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2$$

unde,  $P_1$  este puterea optică a primei fețe a lentilei, iar  $P_2$  este puterea optică a celei de a doua fețe a acesteia:

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1}$$

$$P_2 = \frac{1-n}{R_2}$$

- localizarea planului principal obiect, respectiv a punctului principal obiect

$$l_1 = V_1 P_1 = \frac{n_1 e}{n} \cdot \frac{P_2}{P}$$

- localizarea planului principal imagine, respectiv a punctului principal imagine

$$l_2 = V_2 P_2 = -\frac{n_2 e}{n} \cdot \frac{P_1}{P}$$

- localizarea planului focal obiect, respectiv a focarului principal obiect

$$f'_1 = V_1 F_1 = -\frac{1}{P} + \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P}$$

relație care este valabilă atunci când mediile care mărginesc lentila au același indice de refracție, respectiv:

$$f_1 = P_1 F_1 = -\frac{n_1}{P}$$

atunci când mediile care mărginesc lentila au indice de refracție diferit

- localizarea planului focal imagine, respectiv a focarului principal imagine

$$f'_2 = V_2 F_2 = \frac{1}{P} - \frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P}$$

relație valabilă atunci când mediile care mărginesc lentila au același indice de refracție, respectiv:

$$f_2 = P_2 F_2 = \frac{n_2}{P}$$

atunci când mediile care mărginesc lentila au indice de refracție diferit  
- pentru determinarea poziției punctelor nodale  $N_1$  și  $N_2$  se vor folosi relațiile:

$$N_1 N_2 = P_1 P_2$$

$$P_1 N_1 = P_2 N_2$$

$$F_1 N_1 = f_2$$

$$N_2 F_2 = f_1$$

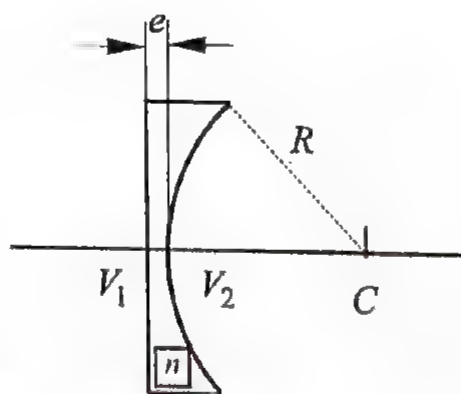
- mărirea liniară a sistemului:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

## 6.7. Aplicații

### Problema nr. 1.

Se consideră o lentilă de grosime  $e = 1,5 \text{ cm}$ , având forma ca în figură. Să se determine poziția punctelor cardinale ale acesteia, știind că materialul din care este confecționată are un indice de refracție egal cu 1,5, iar raza feței curbe este  $R = 15 \text{ cm}$ .



### Rezolvare

- puterea optică a primei fețe:

$$P_1 = 0 \text{ dioptrii}$$

rezultat care era de așteptat, deoarece prima față a lentilei este plană

- puterea optică a celei de a doua fețe este:



$$P_2 = -\frac{1,5-1}{1,5 \cdot 10^{-2}} = -3,33 \text{ dioptrii (m}^{-1}\text{)}$$

și deci puterea optică a sistemului:

$$P = P_2 = -3,33 \text{ dioptrii (m}^{-1}\text{)}$$

- se observă că valoarea obținută este negativă; sistemul este divergent
- se determină pozițiile punctelor cardinale ale sistemului considerat; poziția punctului principal obiect și a planului principal obiect este:

$$l_1 = V_1 \mathcal{P}_1 = \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = \frac{e}{n} = \frac{1,5}{1,5} = 1 \text{ cm}$$

unde s-a ținut cont de faptul că  $P = P_2$

- se observă că  $l_1 > 0$ , ceea ce înseamnă că planul principal obiect este spre dreapta; în figură, el este notat cu  $\pi_1$
- la intersecția planului principal obiect cu axa optică principală se află punctul principal obiect,  $\mathcal{P}_1$
- poziția planului principal imagine se determină cu ajutorul relației:

$$l_2 = V_2 \mathcal{P}_2 = -\frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = 0 \text{ cm}$$

deci el este tangent la curbura lentilei; în figură, a fost notat cu  $\pi_2$

- la intersecția sa cu axa optică principală se află punctul principal imagine  $\mathcal{P}_2$ ; el coincide cu vârful  $V_2$  al feței curbe a lentilei divergente
- poziția focarului obiect (față de  $V_1$ ):

$$f'_1 = V_1 F_1 = -\frac{1}{P_2} + \frac{e}{n} = 31 \text{ cm}$$

unde s-a ținut cont de faptul că  $P = P_2$ .

- distanța focală obiect (față de  $\mathcal{P}_1$ ):

$$f_1 = 31 - 1 = 30 \text{ cm}$$

- rezultă că distanța focală obiect se măsoară la dreapta vârfului  $V_1$ , deci focarul corespunzător este virtual, plasat în spațiul imagine
- poziția focarului imagine (față de  $V_2$ ):

$$f'_2 = V_2 F_2 = \frac{1 - \frac{e}{n} P_1}{P} = \frac{1}{P_2} = -30 \text{ cm}$$

unde s-a ținut cont de faptul că  $P = P_2$

- distanța focală imagine (față de  $\mathcal{P}_2$ ):

$$f_2 = \mathcal{P}_2 F_2 = \frac{1}{P_2} = -30 \text{ cm}$$

deoarece punctul principal imagine coincide cu vârful  $V_2$  al feței curbe a lentilei divergente

- focarul imagine se află la stânga vârfului  $V_2$ , deci este un focar virtual  
- se observă că este îndeplinită condiția ca cele două distanțe focale ale lentilei să fie egale în modul, în condițiile în care acesta este mărginit de același mediu (aerul)

$$|f_2| = f_2 = 30 \text{ cm}$$

- se poate spune că sistemul dat este o lentilă divergentă având distanța focală  $f = -30 \text{ cm}$

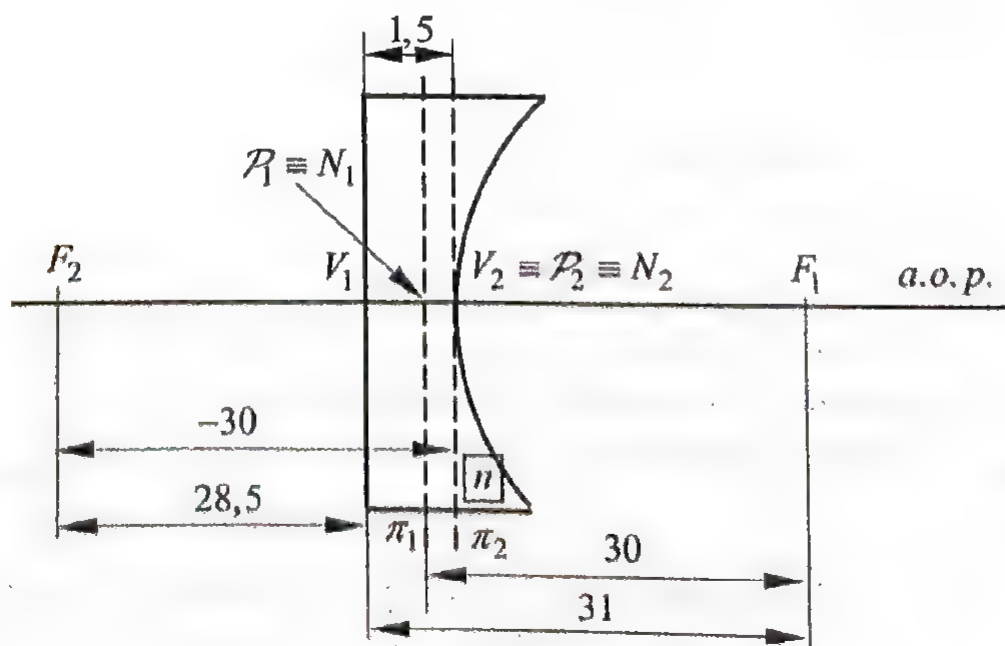
- față de vârful  $V_1$ , focarul imagine al lentilei se află la distanța:

$$V_1 F_2 = -f_2 - e = 30 - 1,5 = 28,5 \text{ cm}$$

- deoarece lentila este mărginită și la stânga și la dreapta de același mediu (aerul), punctele nodale obiect ( $N_1$ ) și imagine ( $N_2$ ) coincid cu punctele principale corespunzătoare:

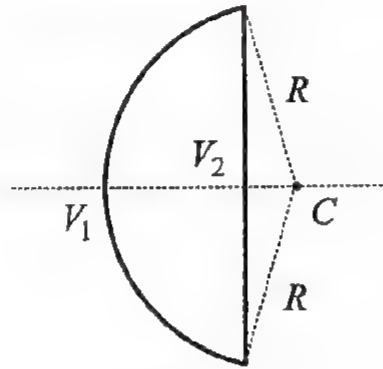
$$N_1 \equiv \mathcal{P}_1 \quad N_2 \equiv \mathcal{P}_2 (\equiv V_2)$$

- poziția punctelor cardinale este ilustrată în figură:



**Problema nr. 2.**

Se consideră o lentilă de grosime  $e = 9,1 \text{ cm}$ , având forma ca în figură. Să se determine poziția punctelor cardinale ale acesteia, știind că materialul din care este confecționată are un indice de refracție egal cu 1,5, iar raza primei fețe este  $R = 9 \text{ cm}$ .



**Rezolvare**

- puterea optică a primei fețe este:

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{n-1}{R} = \frac{1,5-1}{9 \cdot 10^{-2}} = 5,55 \text{ dioptrii}$$

- puterea optică a celei de a doua fețe:

$$P_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-n}{\infty} = 0 \text{ dioptrii}$$

- deoarece a doua față este plană, puterea sa optică este nulă

- rezultă astfel puterea optică a blocului optic:

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2 = 5,55 + 0 - \frac{9,1 \cdot 10^{-2}}{1,5} \cdot 5,55 \cdot 0 = 5,55 \text{ dioptrii } (= P_1)$$

- valoarea obținută este pozitivă, deci sistemul este convergent

- se determină pozițiile punctelor cardinale ale sistemului considerat; poziția punctului principal obiect și a planului principal obiect este:

$$l_1 = V_1 \mathcal{P}_1 = \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = 0 (\text{cm})$$

- rezultă că punctul principal obiect coincide cu vârful  $V_1$  al primei suprafețe:

$$\mathcal{P}_1 \equiv V_1$$

deci planul principal obiect este tangent la lentilă în punctul  $V_1$

- poziția punctului principal imagine și a planului principal imagine:

$$l_2 = V_2 \mathcal{P}_2 = -\frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = -\frac{9,1}{1,5} \cdot \frac{5,55}{5,55} = -6,07 \text{ cm} (< 0)$$

- rezultă că punctul principal imagine este situat în stânga vârfului  $V_2$  al celei de a doua suprafețe (al suprafeței plane)
- planul principal imagine este perpendicular pe axa optică principală a lentilei în  $\mathcal{P}_2$

- deoarece lentila este mărginită de același mediu (aer, cu  $n_{aer} = 1$ ), punctele nodale coincid cu punctele principale corespunzătoare:

$$N_1 \equiv \mathcal{P}_1 \quad N_2 \equiv \mathcal{P}_2$$

- poziția focarului principal obiect față de  $V_1$ :

$$f_1 = V_1 F_1 = -\frac{1}{P} + \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = -\frac{1}{P_1} = -18 \text{ cm} (< 0)$$

deci focarul principal obiect este situat în stânga lui  $V_1$

- poziția focarului principal obiect față de punctul principal obiect  $\mathcal{P}_1$ :

$$\mathcal{P}_1 F_1 \equiv V_1 F_1 = -18 \text{ cm}$$

- poziția focarului principal imagine față de  $V_2$ :

$$f_2 = V_2 F_2 = \frac{1}{P} - \frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = \frac{1}{P_1} - \frac{e}{n} = 18 - \frac{9,1}{1,5} = 11,93 \text{ cm} (> 0)$$

deci focarul principal imagine este situat în dreapta lui  $V_2$

- poziția focarului principal imagine față de punctul principal imagine  $\mathcal{P}_2$ :

$$\mathcal{P}_2 F_2 \equiv \mathcal{P}_2 V_2 + V_2 F_2 = 6,07 + 11,93 = 18 \text{ cm}$$

### Observație

- pozițiile celor două focare față de punctele principale corespunzătoare se pot calcula și cu expresiile:

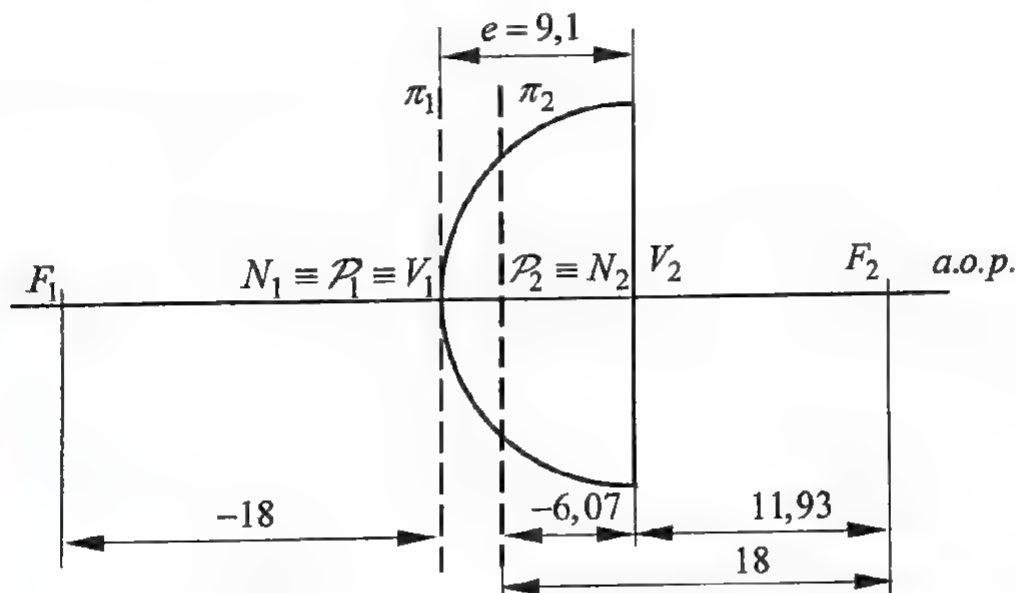
$$\mathcal{P}_1 F_1 = -\frac{n_1}{P} = -\frac{1}{P} = -\frac{1}{5,55} = -18 \text{ cm}$$

respectiv:

$$\mathcal{P}_2 F_2 = \frac{n_2}{P} = \frac{1}{P} = \frac{1}{5,55} = 18 \text{ cm}$$



- se vede că, indiferent de modul de calcul, cele două focare sunt poziționate la distanțe egale față de punctele principale corespunzătoare, în spațiile obiect, respectiv imagine, așa după cum era de așteptat
- ducând prin cele două focare principale planele perpendiculare pe axa optică principală se obțin planele focale obiect, respectiv imagine, care conțin focarele lentilei
- poziția punctelor cardinale este ilustrată în figura de mai jos:



### Problema nr. 3.

Se consideră un obiect liniar având înălțimea de  $5\text{ cm}$ , perpendicular pe axa optică principală a lentilei din problema precedentă, situat la o distanță de  $31\text{ cm}$  față de aceasta. Caracterizați imaginea obținută.

### Rezolvare

- cunoscând că distanța focală a lentilei groase este de  $18\text{ cm}$ , cu ajutorul ecuației punctelor conjugate se poate obține poziția imaginii:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = \frac{18(-31)}{18 - 31} = 42,92\text{ cm} = P_2B_2$$

unde:

$$x_1 = P_1B_1 = -31\text{ cm} = V_1B_1$$

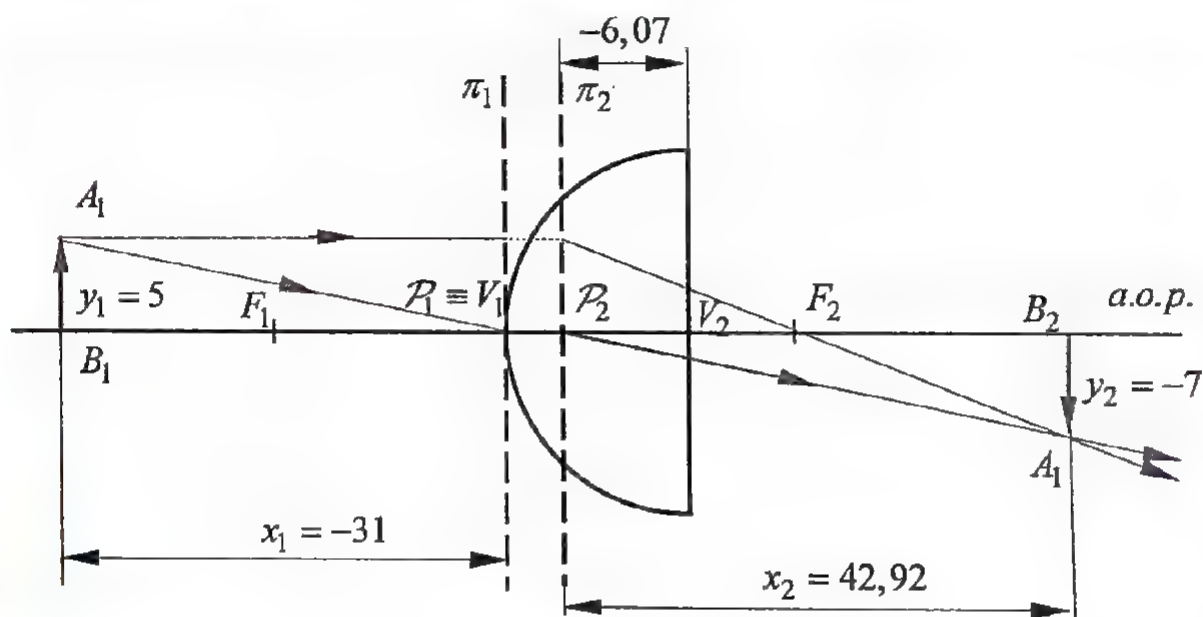
- se observă că  $x_2 > 0$ , deci imaginea este reală
- folosind mărirea liniară transversală, se determină mărirea imaginii:

$$\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{42,92}{-31} = -1,4$$

$$\beta_1 = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta y_1 = -7 \text{ cm} < 0$$

deci imaginea este răsturnată, adică este reală

- formarea imaginii prin lentila groasă este ilustrată în figura de mai jos:



#### Problema nr. 4.

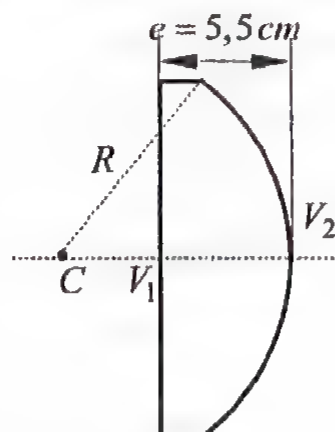
Se consideră lentila groasă din figură. Stabiliți poziția punctelor cardinale și caracterizați imaginea unui obiect liniar având înălțimea de  $5 \text{ cm}$ , situat perpendicular pe axa optică principală, la o distanță de  $35 \text{ cm}$  de lentilă. Indicele de refracție al materialului din care este confecționată este egal cu  $1,5$ , iar raza celei de a doua fețe este de  $13,97 \text{ cm}$ .

#### Rezolvare

- puterea optică a primei fețe este:

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{n-1}{\infty} = 0 \text{ dioptrii}$$

rezultat care era de așteptat, deoarece această față este plană, deci puterea sa optică este nulă



- puterea optică a celei de a doua fețe:

$$P_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-n}{R} = \frac{1-1,5}{-13,97 \cdot 10^{-2}} = 3,58 \text{ dioptrii}$$

- rezultă că puterea optică a blocului optic este:

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2 = 0 + 3,58 - \frac{5,5 \cdot 10^{-2}}{1,5} \cdot 0 \cdot 3,58 = 3,58 \text{ dioptrii } (= P_2)$$

- valoarea obținută este pozitivă, deci sistemul este convergent
- poziția punctului principal obiect și a planului principal obiect este:

$$l_1 = V_1 \mathcal{P}_1 = \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = \frac{e}{n} = \frac{5,5}{1,5} = 3,66 \text{ cm } (> 0)$$

- rezultă că punctul principal obiect este situat în dreapta vârfului  $V_1$  al primei suprafețe (al suprafeței plane)
- planul principal obiect,  $\pi_1$ , este perpendicular pe axa optică principală a lentilei și trece prin  $\mathcal{P}_1$
- poziția punctului principal imagine și a planului principal imagine:

$$l_2 = V_2 \mathcal{P}_2 = -\frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = 0$$

- planul principal imagine  $\pi_2$  este tangent la lentilă în punctul  $V_2$
- deoarece în stânga (spațiul obiect) și în dreapta lentilei (spațiul imagine) este același mediu (aer, cu  $n_{\text{aer}} = 1$ ), punctele nodale coincid cu punctele principale corespunzătoare:

$$N_1 \equiv \mathcal{P}_1$$

$$N_2 \equiv \mathcal{P}_2$$

- poziția focarului principal obiect față de  $V_1$ :

$$f_1 = V_1 F_1 = -\frac{1}{P} + \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = -\frac{1}{P_2} + \frac{e}{n} = -\frac{1}{3,58} + \frac{5,5 \cdot 10^{-2}}{1,5} = -24,27 \text{ cm} (< 0)$$

deci focarul principal obiect este situat în stânga lui  $V_1$

- poziția focarului principal obiect față de punctul principal obiect  $\mathcal{P}_1$ :

$$\mathcal{P}_1 F_1 = -\frac{1}{P} = -\frac{1}{3,58} = -0,2793 \text{ m} = -27,93 \text{ cm} (< 0)$$

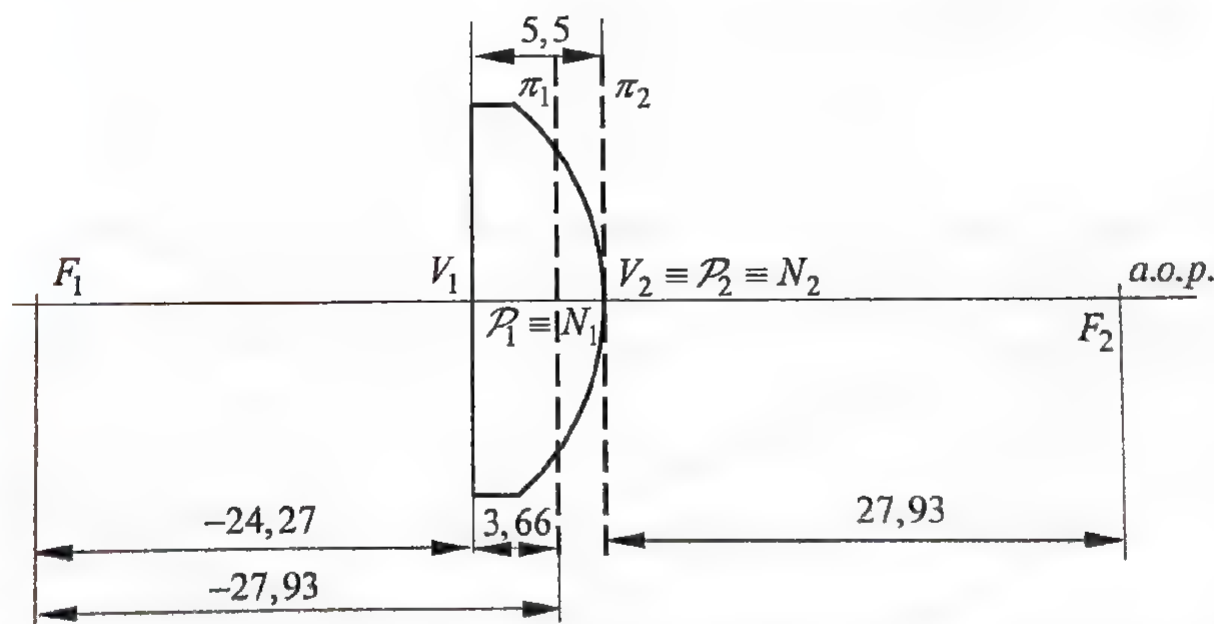
deci focarul principal obiect este situat în stânga lui  $\mathcal{P}_1$

- poziția focarului principal imagine față de  $V_2$ :

$$f_2 = V_2 F_2 = \frac{1}{P} - \frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{3,58} = 0,2793 \text{ m} = 27,93 \text{ cm} (> 0)$$

deci focarul principal imagine este situat în dreapta lui  $V_2$ , care coincide cu  $\mathcal{P}_2$ .

- situația este cea din figură:



- cunoscând distanța focală a lentilei groase (de 27,93 cm), cu ajutorul ecuației punctelor conjugate se poate obține poziția imaginii:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{f x_1}{f + x_1} = \frac{27,93 \cdot (-38,66)}{27,93 - 38,66} = 100,63 \text{ cm} = \mathcal{P}_2 B_2$$

unde:

$$x_1 = \mathcal{P}_1 B_1 = \mathcal{P}_1 V_1 + V_1 B_1 = -3,66 - 35 = -38,66 \text{ cm}$$

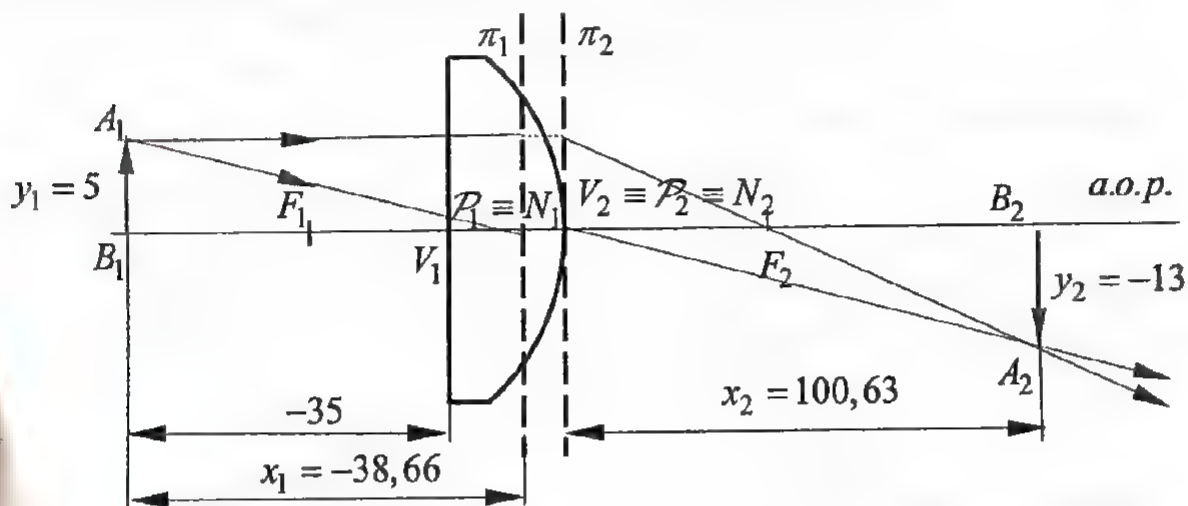


- folosind mărirea liniară transversală, se determină mărirea imaginii:

$$\beta_2 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{100,63}{-38,66} = -2,6$$

$$\beta_2 = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta y_1 = -13 \text{ cm}$$

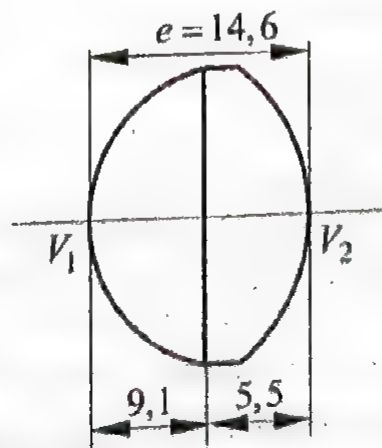
- formarea imaginii este prezentată în figura de mai jos:



### Problema nr. 5.

Să se caracterizeze sistemul format prin asocierea celor două lentile din problemele precedente, așezate ca în figură. Dacă în fața lentilei astfel obținute se așează un obiect luminos, liniar, la o distanță de 22 cm de aceasta, stabiliți tipul imaginii formate de noul sistem optic, știind că obiectul are 5 cm înălțime și este situat perpendicular pe axa optică principală.

### Rezolvare



- grosimea lentilei este:

$$e = 9,1 + 5,5 = 14,6 \text{ cm}$$

- puterea optică a primei fețe:

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{1,5-1}{9 \cdot 10^{-2}} = 5,55 \text{ dioptrii}$$

- puterea optică a celei de a doua fețe:

$$P_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-1,5}{-13,97 \cdot 10^{-2}} = 3,58 \text{ dioptrii}$$

- puterea optică a sistemului de lentile lipite:

$$P = P_1 + P_2 - \frac{e}{n} P_1 P_2 = 5,55 + 3,58 - \frac{14,6 \cdot 10^{-2}}{1,5} \cdot 5,55 \cdot 3,58 = 7,2 \text{ dioptrii}$$

- valoarea obținută este pozitivă, deci sistemul este convergent

- poziția punctului principal obiect și a planului principal obiect:

$$l_1 = V_1 \mathcal{P}_1 = \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = \frac{14,6}{1,5} \cdot \frac{3,58}{7,2} = 4,8 \text{ cm} (> 0)$$

- valoarea obținută este pozitivă, deci punctul principal obiect este situat în dreapta vârfului  $V_1$  al primei suprafețe (al suprafeței plane)

- planul principal obiect,  $\pi_1$ , este perpendicular pe axa optică principală și trece prin  $\mathcal{P}_1$

- poziția punctului principal imagine și a planului principal imagine:

$$l_2 = V_2 \mathcal{P}_2 = -\frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = -\frac{14,6}{1,5} \cdot \frac{5,55}{7,2} = -7,50 \text{ cm} (< 0)$$

- planul principal imagine  $\pi_2$  este situat la stânga lui  $V_2$

- deoarece în stânga (spațiul obiect) și în dreapta lentilei (spațiul imagine) este același mediu (aer, cu  $n_{\text{aer}} = 1$ ), punctele nodale coincid cu punctele principale corespunzătoare:

$$N_1 \equiv \mathcal{P}_1 \qquad N_2 \equiv \mathcal{P}_2$$

- poziția focarului principal obiect față de  $V_1$ :

$$f_1 = V_1 F_1 = -\frac{1}{P} + \frac{e}{n} \cdot \frac{P_2}{P} = -9,04 \text{ cm} (< 0)$$

- deci focarul principal obiect este situat în stânga lui  $V_1$

- poziția focarului principal obiect față de punctul principal obiect  $\mathcal{P}_1$ :

$$P_1 F_1 = -\frac{1}{P} = -\frac{1}{7,2} = -0,1388m = -13,88cm (< 0)$$

deci focarul principal obiect este situat în stânga lui  $\mathcal{P}$

- poziția focarului principal imagine față de  $V_2$ :

$$f_2 = V_2 F_2 = \frac{1}{P} - \frac{e}{n} \cdot \frac{P_1}{P} = 6,38 \text{ cm} (> 0)$$

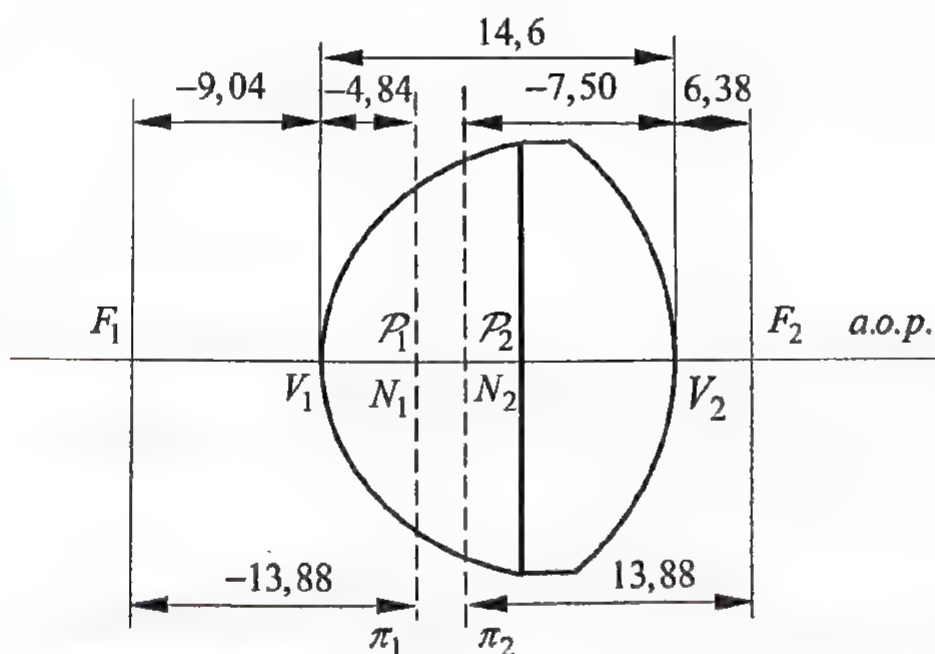
deci focarul principal imagine este situat în dreapta lui  $V_2$

- poziția focarului principal imagine față de  $\mathcal{P}_2$ :

$$\mathcal{P}_2 F_2 = \frac{1}{p} = 13,88 \text{ cm} (> 0)$$

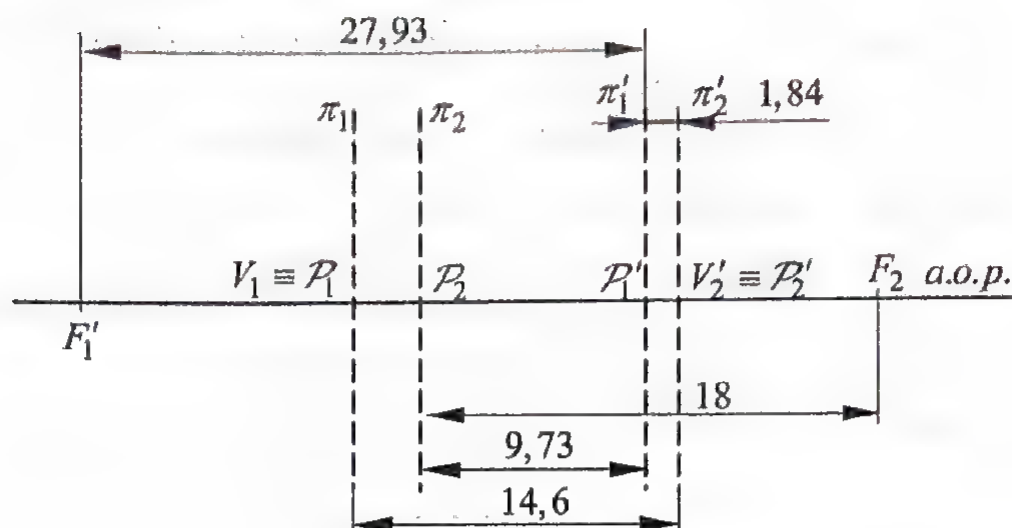
deci focarul principal imagine este situat în dreapta lui  $\mathcal{P}_2$

Situația este prezentată în figură:



### Observație

- lentila de mai sus poate fi considerată ca o asociere de două sisteme centrate
- ținând cont de pozițiile relative ale punctelor cardinale ale fiecărui sistem centrat, situația este cea din figura de mai jos (tot ce este notat cu „prim” ține de a doua lentilă):



- folosind rezultatele privind mărimea distanțelor focale ale unei asocieri de sisteme centrate, în care mărimea notată cu  $\Delta$  este distanța dintre focarul imagine al primului sistem centrat și focarul obiect al celui de al doilea sistem centrat,  $\Delta = F_2 F_1'$ , se va obține:

$$\Delta = F_2 F_1' = 27,93 - 9,73 + 18 = 36,2 \text{ cm}$$

respectiv:

$$|\mathcal{F}| = \frac{|f \cdot f'|}{\Delta} = \frac{18 \cdot 27,93}{36,2} = 13,88 \text{ cm}$$

valoare care corespunde distanței focale atât calculate, cât și determinate experimental, a celui de al doilea sistem centrat

- obiectul având înălțimea de 5 cm este situat la o distanță de 22 cm de lentilă, adică față de vârful  $V_1$

$$V_1 B_1 = 22 \text{ cm}$$

- cunoscând distanța focală a lentilei groase (de 13,88 cm), cu ajutorul ecuației punctelor conjugate se poate obține poziția imaginii:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{f x_1}{f + x_1} = \frac{13,88 \cdot (-26,84)}{13,88 - 26,84} = -28,74 \text{ cm} = P_2 B_2$$

unde:

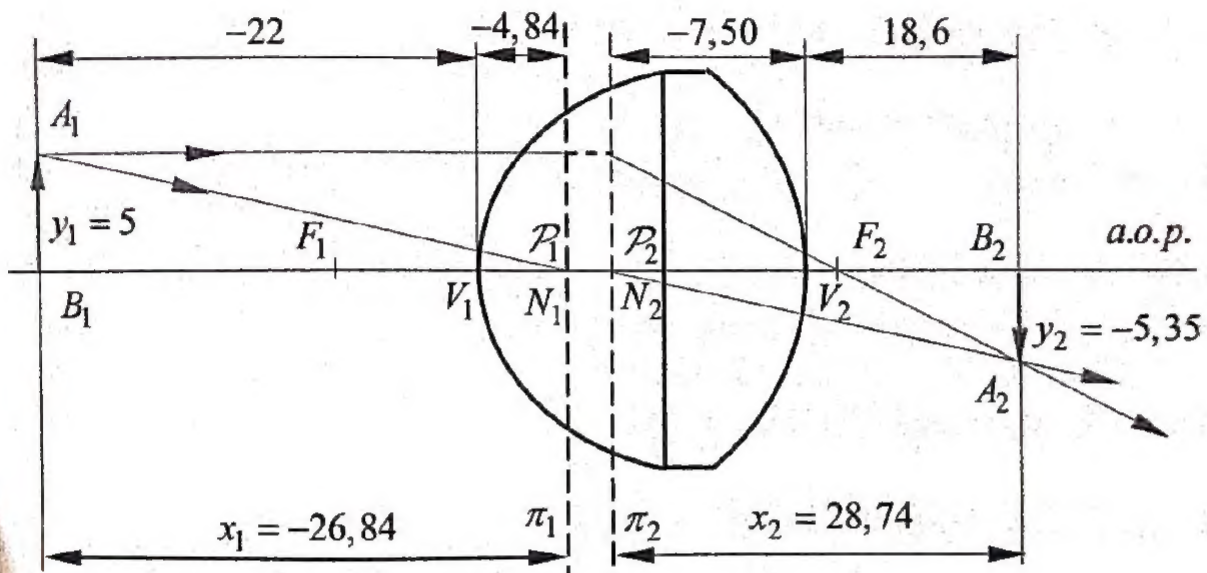
$$x_1 = P_1 B_1 = P_1 V_1 + V_1 B_1 = -4,84 - 22 = -26,84 \text{ cm}$$

- folosind expresia măririi liniare transversale, se determină mărimea imaginii:



$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \beta = \frac{28,74}{-26,84} = -1,07$$

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta y_1 = -5,35 \text{ cm}$$



## BIBLIOGRAFIE

- [1] G. G. Brătescu – Optica, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985
- [2] I. Bunget (coord) - Compendiu de fizică, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1988
- [3] T. Crețu – Fizica generală, vol. I, Editura Tehnică, București, 1984
- [4] P. Dodoc – Teoria și construcția sistemelor optice, Editura Tehnică, București, 1982
- [5] N. Gherbanovschi, M. Prodan, Șt. Levai - Fizică. Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985
- [6] O. Gherman, E. Magyari, L. Méder, L. Saliu, L. Tătar, F. Uliu – Probleme de fizică pentru liceu, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1975
- [7] I. Ioviț-Popescu, E. I. Toader - Optica, Editura Științifică și Enciclopedică, București 1989
- [8] E. Luca – Fizică generală, Editura Științifică, București, 1996
- [9] D. Meister - Wavefront aberrations and spectacle lenses, part one and part two, Dispensing Optics, January 2010, [http://64.50.176.246/files/wavefront\\_aberrations\\_and\\_spectacle\\_lenses.pdf](http://64.50.176.246/files/wavefront_aberrations_and_spectacle_lenses.pdf)
- [10] I. Milea – Optica, Vol. I și II, Editura Universității din Oradea, 1998
- [11] G. C. Moisil, E. Curatu - Optică. Teorie și aplicații, Editura Tehnică, București, 1986
- [12] I. Pogany – Fotografia de la teorie la practică, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987
- [13] I. I. Popescu, E. I. Toader – Optica, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1989
- [14] J. Roussel – Optique géométrique, Cours, 2018, <https://femto-physique.fr/optique/pdf/book-optgeo.pdf>
- [15] Sbârciog, C. - Subiecte de fizică, Vol. 2, Editura Universității din Oradea, 2008
- [16] H. Țintea – Optică și spectroscopie, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973



CARMEN-DANIELA CĂPITANU - Bazele opticii geometrice

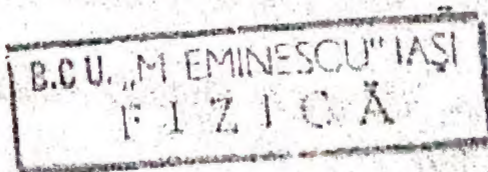
[17] L. Veissier – Optique géométrique,  
<https://liovis.files.wordpress.com/2009/08/cours-optique-gc3a9o.pdf>

### SURSE WEB

[http://www.wiley-vch.de/books/sample/3527403809\\_c01.pdf](http://www.wiley-vch.de/books/sample/3527403809_c01.pdf)

[http://users.polytech.unice.fr/~labonte/documents/Optique/cours\\_optique.pdf](http://users.polytech.unice.fr/~labonte/documents/Optique/cours_optique.pdf)

[http://www.drdrbill.com/downloads/optics/geometric-optics/Thick\\_Lenses.pdf](http://www.drdrbill.com/downloads/optics/geometric-optics/Thick_Lenses.pdf)





ISBN: 978-606-26-1185-9



9 786062 611859